CHAPITRE I.

LA THEORIE DES CHOIX DU CONSOMMATEUR

Nous analyserons dans ce chapitre la théorie de l'utilité marginale puis la théorie de la courbe d'indifférence.

SECTION I.

LA THEORIE DE L'UTILITE MARGINALE

A. DEFINITIONS

1. La notion d'utilité

L'utilité est la capacité que possède un bien à satisfaire un besoin.

L'utilité traduit la satisfaction qu'une personne retire de la consommation d'un bien ou d'un service

L'utilité est un instrument scientifique, utilisé par les économistes pour comprendre comment les consommateurs rationnels répartissent leurs ressources limitées entre les différents biens et services qui leur procure une certaine satisfaction.

2. la notion d'utilité totale

L'utilité totale notée U d'un bien X mesure la satisfaction globale que l'individu retire de la consommation de ce bien.

L'utilité totale procurée par un bien est celle que retire l'individu du choix 'une certaine quantité de ce bien. L'utilité totale d'un bien varie en fonction de la quantité qui est choisie. Elle est définie pour une quantité fixée du ou des autres biens entrant dans la fonction d'utilité.

3. La fonction d'utilité

Le niveau de U dépend de la quantité du bien X : U est fonction de X : U=U(X)

Pour deux biens X et Y, le niveau de satisfaction dépend de la quantité consommée du bien X et de la quantité consommée du bien Y : $\boxed{\mathbf{U = U\,(X\,,\,Y\,)}}$

U = niveau de satisfaction ou d'utilité

X = quantité consommée du bien X

Y = quantité consommée du bien Y

4. la notion d'utilité marginale

L'utilité marginale d'un bien X notée Um(X) est l'utilité retirée de la consommation d'une unité additionnelle d'un bien.

L'utilité marginale d'un bien est l'augmentation de l'utilité totale obtenue à partir de la consommation d'une unité supplémentaire de ce bien, si la consommation des autres biens reste constante.

L'utilité marginale Um mesure donc l'évolution de l'utilité totale « à la marge » c'est à dire pour une variation très petite de la quantité consommée.

4. La loi des utilités marginales décroissantes : (la 1ére loi de Gossen)

A chaque unité supplémentaire consommée, le désir du consommateur diminue. Donc chaque unité supplémentaire possède une utilité inférieure à celle de l'unité précédente :

Soit : Utilité marginale$_{(\text{1ère unité consommée})}$ > Utilité marginale $_{(\text{2ème unité consommée})}$ > > Um_n

La loi de l'utilité marginale énonce que l'utilité marginale d'un bien a tendance à diminuer, à mesure que l'on en accroît la consommation.

Cette loi est purement empirique et n'a pour fondement que l'observation selon laquelle l'homme est en général très satisfait de posséder une première télé et beaucoup moins par l'acquisition d'un deuxième puis d'un troisième…

B. ILLUSTRATION

Supposons que l'utilité est mesurable et quantifiable. La satisfaction que procure Fethi de la consommation des pommes est la suivante :

Quantité de pomme consommée	0	1	2	3	4	5	6	7
Utilité totale procurée	0	10	17	23	27	29	29	27

<u>Travail à faire</u> :
1) Etablir le barème de l'utilité marginale Um, vos conclusions.
2) On déduit l'Utilité totale U, vos conclusions.
3) Tracer les courbes de l'UT et l'Um et indiquer le point de saturation, analyser, vos conclusions.

<u>Réponses</u> :

a) l'utilité marginale et la loi de l'utilité marginale décroissante

Quantité de pommes consommée	0	1	2	3	4	5	6	7
Utilité totale procurée	0	10	17	23	27	29	29	27
Utilité marginale	0	10	7	6	4	2	0	-2

- En passant de la consommation de 1 pomme à 2 pommes, la variation de l'utilité totale est de (17-10) = 7,

7 étant la l'utilité de la dernière pomme consommée. , 7 étant l'utilité marginale.

L'utilité marginale est donc le rapport de la variation de l'utilité totale à la variation de la quantité consommée d'un bien donné X.

$Um (X) = \Delta U / \Delta X = (17 - 10) / (2 - 1) = 7$

- Le comportement de consommation de Fethi respecte la loi de l'utilité marginale décroissante :

Um(1ère pomme) > Um2 > Um3 > Um4 > Um5 > Um6 > Um7
10 > 7 > 6 > 4 > 2 > 0 > -2

- Fethi n'est pas rationnel car il a consommé la 6ème pomme qui n'a pas augmenté sa satisfaction et la 7ème pomme qui, plus grave a réduit son utilité totale. Il aurait dû s'arrêter à la 5ème pomme.

Si on suppose qu'il s'arrête à la 5ème pomme et que l'Um ne s'annule jamais (hypothèse de non-saturation), on peut construire une fonction d'utilité concave.

Pour vérifier si la fonction est concave, il suffit de démontrer que la 1ère variation est positive et que la 2ème variation est négative.

La 1ère variation : $\Delta U / \Delta X = 10, 7, 6, 2, > 0 \Longrightarrow$ la fonction est croissante

La $2^{ème}$ variation : $\Delta(\Delta U / \Delta X) / \Delta X = (7 - 10)/(2-1) = -3, -1, -2, -2 < 0$ $\Rightarrow$ elle est concave

Pour une fonction continue, la $1^{ère}$ variation n'est autre que le dérivé premier, la $2^{ème}$ variation n'est autre que le dérivé second. Donc pour montrer que la fonction d'utilité est concave, il faut que le dérivé premier soit positif et le dérivé second soit négatif.

La fonction d'utilité doit être par définition deux fois dérivable

b) <u>l'utilité totale</u>

On remarque que l'utilité totale est la somme des niveaux de satisfaction retiré de chaque unité de bien.

Pour chaque quantité consommée, l'utilité totale est égale à la somme des utilités marginales.

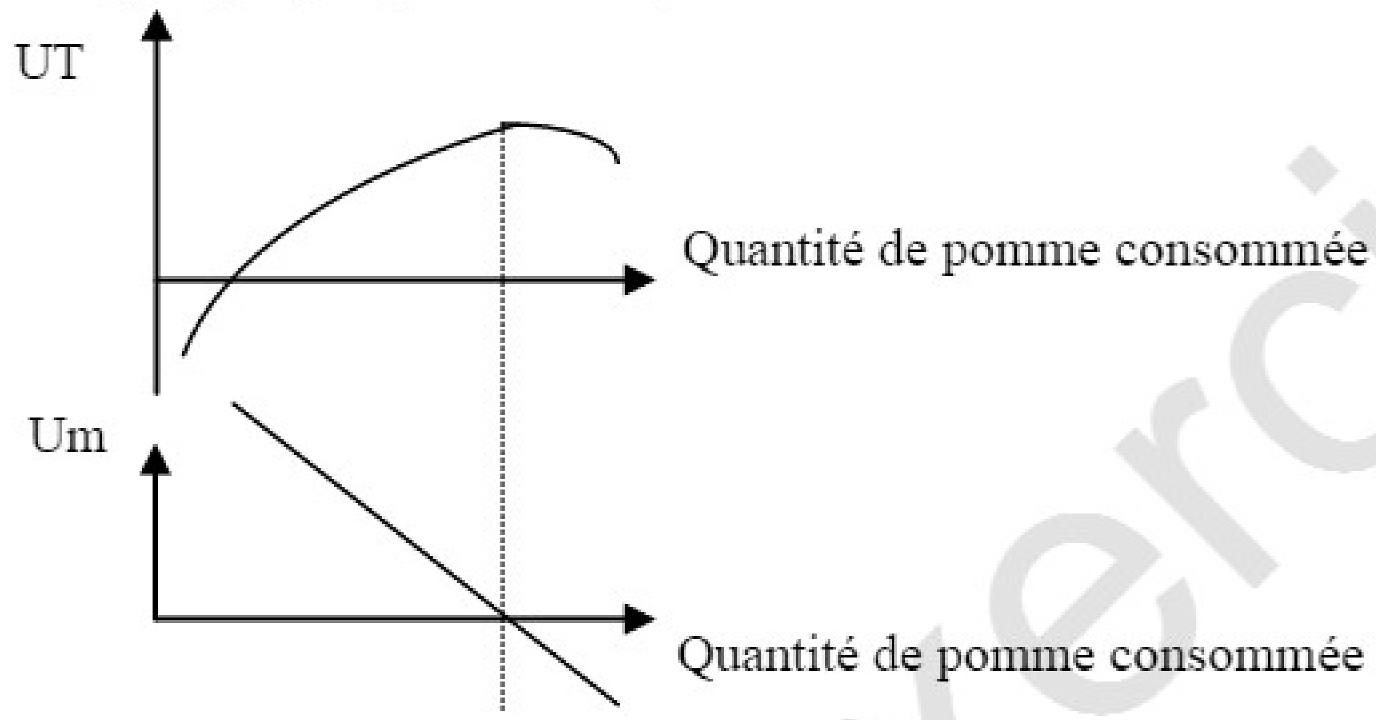
Par exemple, la consommation de 5 pommes procure une utilité totale de 29.

29 est égale à la somme des utilités marginales.

UT(5pommes) = Um(1pomme) + Um(2pommes) + Um(3) + Um(4) + Um(5)
29 = 10 + 7 + 6 + 4 + 2

Donc UT = Um1 + Um2 + Um3 +….+ Umn

c) Analyse graphique du comportement de Fethi dans sa consommation des pommes



C. Formalisation

1. L'utilité totale

L'utilité totale U d'une consommation est la somme des utilités marginales des unités consommées. Soit Um_n l'utilité marginale de néme unité consommée

$$\boxed{U = Um_1 + Um_2 + \ldots + Um_n}$$

2. La notion de la dérivé et le calcul de l'utilité marginale

On distingue un bien parfaitement divisible d'un bien **<u>partiellement divisible</u>**

- Quant on a un bien imparfaitement divisible, qu'on ne peut utiliser que par unité. Par exemple une voiture ne peut être consommée que par unité. La moitié d'une voiture n'est pas utile et ne peut satisfaire le besoin de transport.

L'utilité marginale d'un bien X **<u>imparfaitement divisible</u>** est la variation totale induite par une unité supplémentaire de ce bien. Soit $\boxed{Um(X) = \Delta U / \Delta X}$.

- Si on dispose d'un bien parfaitement divisible, la variation est infiniment petite. Pour mesurer cette variation, on peut faire appel à un outil mathématique : **le dérivé**

L'utilité marginale d'un bien X **<u>parfaitement divisible</u>** est la variation de l'utilité totale pour une variation infiniment petite de la quantité. C'est le concept de dérivé en mathématique qui permet d'appréhender cette définition. Soit $\boxed{\mathbf{Um = U'(X) \Longleftrightarrow Um = dU/dX}}$

Rappel mathématique

a = une constante x = une variable f, g, des fonctions de x

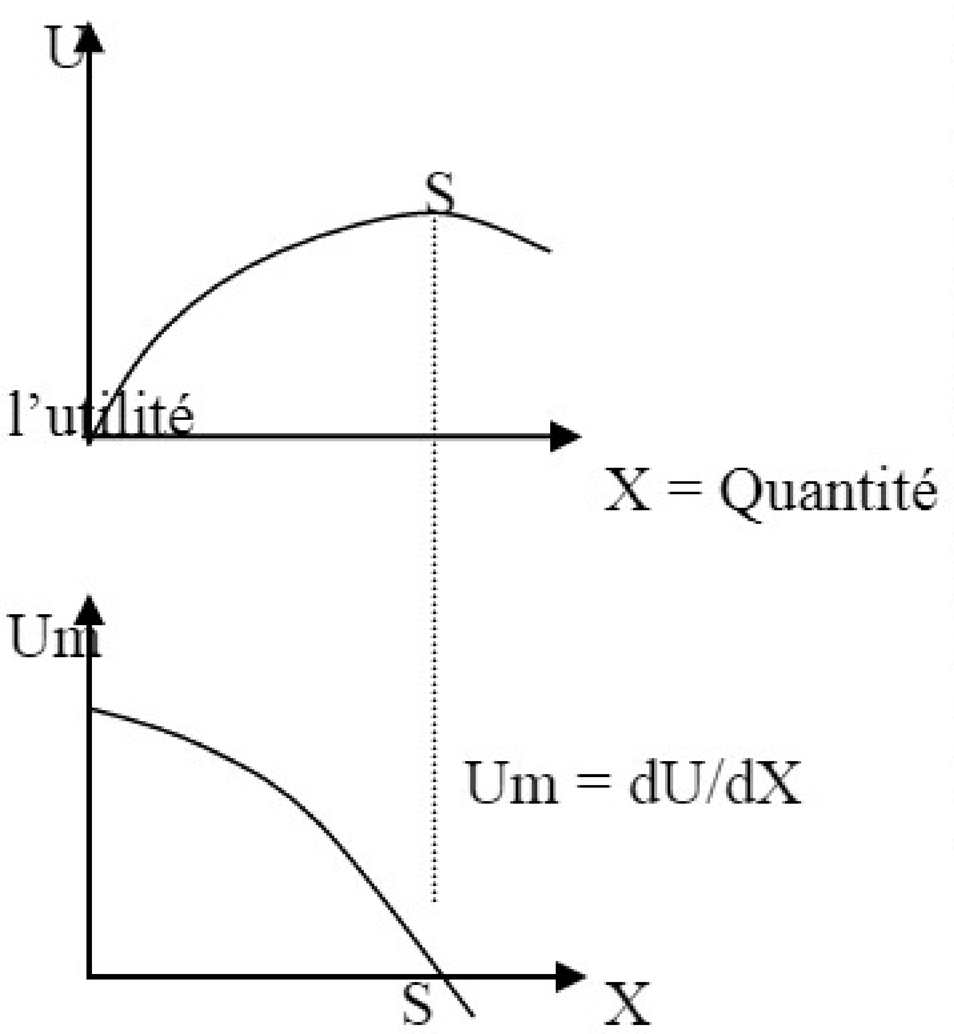
	a=Cte	ax	x	x^a	a/x	af	f.g	f/g
dérivée	0	a	1	ax^{a-1}	$-a/x^2$	a f'	f'g+f g'	$(f'g-f g')/g^2$

Dérivée d'une fonction à une seule variable f(x) ou df/dx ou d(fx)/dx

Fonction à plusieurs variables, on parle de dérivée partielle première

f(x,y,z,…) $f'(x) = \partial f/\partial x = \partial f(x,y,z,\ldots)/\partial x$

3. Représentation graphique de l'utilité totale et de l'utilité marginale



L'utilité totale atteint son maximum au <u>point de satiété</u> càd au <u>point de saturation</u> du consommateur S.

<u>Au point S, l'utilité marginale est nulle</u> : une unité supplémentaire de consommation n'augmente plus la satisfaction.

Si la consommation de X est poussée au-delà de S, l'utilité marginale devient négative et l'utilité totale diminue.

On suppose qu'un individu arrête sa consommation au point S.

Donc on fait <u>l'hypothèse que l'utilité marginale est normalement décroissante mais toujours positive</u>.

C. <u>LA DETERMINATION DE L'EQUILIBRE DU CONSOMMATEUR PAR LE BIAIS DE L'UTILITE MARGINALE</u>

1. Définition de la notion de l'équilibre du consommateur

<u>L'équilibre du consommateur se réalise quant il demande le choix optimal. Ce choix correspond à la maximisation de son utilité totale</u>

La fonction objective du consommateur est de maximiser son utilité, c'est à dire sa satisfaction.

L'utilité est une fonction des quantités consommées. Supposons que le consommateur achète deux biens X et Y.

La fonction d'utilité s'écrit : $\boxed{U = U(X,Y)}$ C'est cette fonction que le consommateur rationnel doit maximiser.

2. Illustration

Supposons que l'utilité est mesurable et que le consommateur se comporte de la manière suivante dans sa consommation de deux biens cinéma et théâtre :

Nombre de spectacle	1	2	3	4	5	6	7
Utilité totale du théâtre	75	144	204	249	285	306	306
Utilité totale du cinéma	60	108	145	168	178	180	180

Travail à faire : Analyser l'équilibre du consommateur dans les 3 cas suivants :

a) dispose d'un revenu illimité et le prix d'une place de cinéma ou de théâtre est de 3 dinars

b) dispose d'un revenu limité de 30 dinars mais les places de cinéma et de théâtre sont gratuites

c) Dispose d'un revenu limité de 30 dinars avec des prix identiques d'une entrée au cinéma et d'une place au théâtre, soit 3 dinars.

d) Dispose du même revenu (30 dinars) avec des prix différents, cinéma : 3 dinars, théâtre : 9 dinars

Réponses :

Nombre de spectacle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Utilité totale du cinéma	60	108	145	168	178	180	180
Utilité marginale cinéma	60	48	37	**23**	10	2	0
Utilité marginale par dinar dépensé cinéma	20	16	12,3	7,7	3,3	0,7	0
Utilité totale du théâtre	75	144	204	249	285	306	306
Utilité marginale théâtre	75	**69**	60	45	36	21	0
Utilité marginale par dinar dépensé théâtre	8,3	7,7	6,7	5	4	2,3	0

a) Si le consommateur dispose d'un revenu illimité (absence de contrainte budgétaire), sa demande n'est plus influencée par les prix. Dans ce cas, il maximise sa satisfaction en allant plusieurs fois au théâtre et au cinéma jusqu'à ce qu'aller au cinéma ou au théâtre ne lui procure aucune satisfaction. Autrement dit jusqu'à ce que l'utilité marginale s'annule pour le dernier spectacle au théâtre et pour le dernier spectacle au cinéma.

Donc l'équilibre du consommateur est atteint quant : Um (cinéma) = 0 et l'Um (théâtre) = 0

Dans notre exemple : la combinaison optimale E(Cinéma, théâtre) qui donne la meilleure satisfaction au consommateur est : 7 entrées au cinéma et 7 entrées au théâtre. Donc le point d'équilibre est : E(7,7)

Même analyse dans le cas ou on dispose d'un revenu limité mais les prix du cinéma et du théâtre sont gratuits.

b) Considérer les prix sont gratuits donne la même situation que le premier cas avec un revenu illimité. Le consommateur va au cinéma sans contrainte de revenu car ceci ne lui coûte rien.

Pour réaliser son équilibre, il doit aller au cinéma et au théâtre jusqu'à ce que l'utilité marginale soit nulle. Um (cinéma) = Um (Théâtre) = 0.

Le point d'équilibre est le même que dans le 1er cas. Soit E (7 , 7)

c) Dans le cas ou le consommateur subi une contrainte budgétaire (revenu limité à 30D) et que les prix sont les même pour le cinéma et le théâtre (3D). Il doit dépenser les 30D entre le cinéma et le théâtre de telle manière d'avoir le maximum d'utilité totale. Il ne tient pas compte des prix dans la combinaison qu'il va choisir.

Selon son revenu et selon les prix, le consommateur ne doit pas dépasser les 30D. Pour cela et vue que les prix sont à 3D, le consommateur ne peut demander que 10 places en tout entre le cinéma et le théâtre.

La combinaison de cinéma et de théâtre qui donne l'équilibre du consommateur est celle qui donne la satisfaction la plus élevée.

Le choix du consommateur est le suivant :

Il commence par aller au théâtre (Um=75), puis théâtre (Um=69), puis au cinéma (Um=60), puis théâtre (Um=60), puis cinéma (Um=48), puis théâtre (Um=45), puis cinéma (Um=37), puis théâtre (Um=36), puis cinéma (Um=23) et enfin théâtre (Um=21)

A ce stade, le consommateur doit s'arrêter d'aller au cinéma et au théâtre car il n'a plus d'argent. Il a dépensé la totalité de son revenu. Les 30D ont été dépensé.

La combinaison E qui lui procure la meilleure satisfaction compte tenu de son revenu est E (4 cinémas, 6 théâtres).

Cette combinaison donne une satisfaction totale de 474 utils.

L'utilité totale est égale à la somme des utilités marginales de théâtres et de cinémas consommés.

474 = 75 + 69 + 69 + 60 + 60 + 48 + 45 + 37 + 36 + 23 + 21

d) le $4^{ème}$ cas se caractérise par : Revenu = 30, Prix cinéma = 3, Prix théâtre = 9

Maintenant les prix relatifs des biens ont changé. Le consommateur va toujours chercher à acheter l'unité de bien disponible pour laquelle l'utilité marginale par dinar dépensé est la plus élevé.

On doit calculer les Um des 2 biens pondérés par les prix pour pouvoir choisir les Um les plus élevées.

On calcule les rapports : Um (théâtre) / Prix théâtre et Um(cinéma) / Prix cinéma

Um pondéré par les prix du 1^{er} spectacle du théâtre = Um (T1) / P_T = 75 / 9 = 8,3

Um pondéré par les prix du 1^{er} spectacle cinéma = 60 / 3 = 20

Le choix optimal du consommateur est le suivant :

Premier achat place de cinéma : [(Um/Pc) = 20] avec Pc prix du cinéma

Deuxième achat place au cinéma : [(Um/Pc) = 16]

$3^{ème}$ achat cinéma=12,3 ; $4^{ème}$ achat théâtre=8,3;$5^{ème}$ achat théâtre=7,7 ;$6^{ème}$ achat cinéma =7,7

On a donc : C1 + C2 + C3 + T1 + T2 + C4 = 4 fois cinéma et 2 fois théâtre

Ainsi le consommateur a épuisé la totalité de son revenu. Il doit arrêter ses achats. IL a dépensé = 4 cinémas à 3D la place et 2 théâtres à 9D la place. Revenu total dépensé = 4 x 3 + 2 x 9 = 30

- On peut en déduire la formule de la contrainte budgétaire

Revenu = Quantité de cinéma x Prix du cinéma + Qté théâtre x Prix du théâtre

R	=	X	.	Px	+	Y	.	Py
30	=	4	.	3	+	2	.	9

C'est la contrainte budgétaire du Consommateur.

Ce choix optimal E(4 cinéma, 2 théâtres) donne une satisfaction totale de :

UT= Um (C1) + Um (C2) + Um (C3) + Um (C4) + Um (T1) + Um (T2)
312 = 60 + 48 + 37 + 23 + 75 + 69

La meilleure satisfaction que peut obtenir le consommateur compte tenu de son revenu et des prix du marché est donnée par le panier E (4, 2) qui donne une utilité maximale U = 312. Aucune autre combinaison ne peut améliorer son utilité.

Ce qu'il faut retenir de cet exemple c'est que :

Les deux conditions d'équilibre du consommateur sont :

- **La contrainte budgétaire est égale : R = X . Px + Y . Py $\Longrightarrow$ 30 = 4x3 +2x 9**
- **La condition d'équilibre est : Um (X) / Px = Um (Y) / Py $\Longrightarrow$ 23 / 3 = 69 / 9**

L'impact d'une augmentation du prix du théâtre (de 3D à 9D), est que le consommateur

a baissé sa consommation de théâtre de 6 à 2. La consommation de cinéma n'a pas changé. Il en résulte que le niveau de vie du consommateur a baissé et le point d'équilibre optimal est passé de E(4,6) à E(4,2).

3. Conclusion :

Trois cas se présente pour un individu rationnel cherchant à maximiser sa fonction d'utilité U = U (X,Y) :

- **Dans une situation**, avec absence de contrainte budgétaire (revenu illimité), l'individu continu à consommer jusqu'à ce que l'utilité marginale de chaque bien soit nulle :

  La condition d'équilibre du consommateur est : Um(X)=Um (Y) = 0

- **Dans une situation avec contrainte budgétaire (revenu limité) mais les prix des biens X et Y sont identiques** (Px = Py = 1); consommer X, c'est renoncer à un autre bien Y. En consommant, le bien X, l'individu doit tenir compte du coût d'opportunité de cette consommation câd la satisfaction qu'il aurait pu obtenir en renonçant à X et en consommant un autre bien substituable Y.

  Si Um(X) > Um(Y) on doit substitution de Y par X

  Si Um(X) < Um(Y) on doit substitution de X par Y

  La condition d'équilibre du consommateur est : Um(X) = Um(Y)

- **Dans une situation avec contrainte budgétaire et des prix différents des biens**, il ne s'agit plus de savoir si l'on doit consommer une unité supplémentaire de X ou de Y, mais de savoir si l'on doit dépenser un dinar supplémentaire en bien X ou en bien Y. Pour avoir le maximum d'utilité, **l'individu doit toujours égaliser les utilités marginales mais il doit aussi les pondérer par les prix des biens X et Y** (Px et Py).

  La condition d'équilibre du consommateur est Um(X)/Px = Um(Y) / Py

Um(X) / Px mesure l'utilité marginale par unité monétaire (un dinar) dépensée sur le bien X.

La condition fondamentale de maximum de satisfaction ou d'utilité est la suivante :

« Un consommateur pour un revenu R et des prix de marché des biens donnés obtiendra le maximum de satisfaction ou d'utilité, quant l'utilité marginale du dernier dinar dépensé pour chaque bien est exactement la même que celle du dernier dinar dépensé pour n'importe quel autre bien[2] »

Um(X) / Px = Um (Y) / Py = … = Utilité marginale par dinar de revenu

Donc la condition d'équilibre est l'égalité entre les utilités marginales par dinar de chaque bien

[2] Paul samuelson, William D. Nordhaus, micro-économie, Ed. d'organisation, 14ème édition 1995.

SECTION II.

LA THEORIE DES COURBES D'INDIFFERENCE

Au début du XXé siècle, Pareto développe la théorie des courbes d'indifférence. Selon cette théorie, on a plus besoin de mesurer et de quantifier l'utilité. Pareto adopte une approche ordinale dans laquelle l'individu ne mesure plus le niveau d'utilité mais est seulement capable d'indiquer un ordre de préférence.

Pour simplifier l'analyse, on suppose que le consommateur ne consomme que deux biens X et Y et qu'il choisit entre deux paniers A et B. qui contiennent des quantités données de X et de Y.

Un panier de biens est une combinaison des quantités de biens X et Y distinguées par le consommateur. Analytiquement, un panier prend la forme d'un vecteur à 2 composantes.

Par exemple A(4,3) : le panier A est composé de 4 unités du bien X et 3 unités de bien Y.

L'analyse reste valable pour n biens.

Pour qu'un individu soit en mesure de définir un ordre de préférence, il n'est pas nécessaire de supposer qu'il sait mesurer son utilité par un indice quantitatif (en utils). Il suffit que ces hypothèses soient réunies :

A. La fonction d'utilite

1. Définition

La fonction d'utilité est la relation entre la quantité consommée et la satisfaction générée par cette consommation.

Pour simplifier la démonstration, on considère que le consommateur ne retire sa satisfaction que par la consommation de 2 biens X et Y.

La fonction d'utilité s'écrit : $\boxed{U = U(X, Y) \quad \text{avec } X > 0 \quad \text{et } Y > 0}$

U : mesure le niveau de satisfaction obtenue
X : la quantité consommée de bien X
Y : la quantité consommée de bien Y

Pour n biens : $U = U(Q_1, Q_2, Q_3 \dots Qn)$

X et Y, les quantités consommées, ne peuvent être que positifs. Des quantités négatives n'auraient aucune signification économique.

Les fonctions sont définies dans l'intervalle $]0, +\infty[$

La fonction d'utilité établit un lien entre un panier de consommation composé d'une quantité donnée de bien X et d'une quantité donnée de bien Y et l'utilité que ce panier procure au consommateur.

La fonction d'utilité mesure donc la satisfaction du consommateur. Elle varie d'une personne à une autre. Le comportement de consommation varie selon l'individu.

2. Propriétés

a. Hypothèse de la « non-saturation » :

Selon cette hypothèse, le consommateur ne dit jamais non à une quantité supplémentaire de bien X ou de bien Y. Il ne connaît jamais la saturation au niveau de la consommation.

Si les deux paniers A et B contiennent la même quantité en X et si A contient une quantité plus grande en Y que B, alors A est préféré à B.

Par exemple A(3,5) et B(2,5) $\Longrightarrow$ A est préféré à B

L'axiome de la « non-saturation » impose les conditions suivantes :

En présence de 2 paniers A et B avec $A = (X_A, Y_A)$ et $B = (X_B, Y_B)$

Si $\left.\begin{matrix} X_A \geq X_B \\ Y_A > Y_B \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} X_A > X_B \\ Y_A \geq Y_B \end{matrix}\right\}$

On aura A préféré à B et B est préféré à A si les signes sont inversés

On peut vérifier facilement si une fonction d'utilité respecte l'axiome de la non-saturation à l'aide de la dérivée partielle première de U par rapport à X $\rightarrow$ $\boxed{\partial U/\partial X_{(Y=Cte)}}$

Cette expression n'est autre que l'utilité marginale de X qui est toujours positive quand X > 0.

b. la fonction d'utilité est par hypothèse continue

Cette hypothèse présente un intérêt économique. Quelle que soit la combinaison choisie de X et de Y, la fonction est définie. A défaut, il y a des combinaisons de X et Y indéfinies.

Cette hypothèse présente un intérêt mathématique. Elle permet l'utilisation de l'outil mathématique : la dérivée.

La fonction d'utilité est par hypothèse dérivable 2 fois

c. La fonction d'utilité est croissante par rapport à la quantité consommée

L'hypothèse de la non-saturation donne des dérivées partielles de la fonction d'utilité positives pour le bien X et pour le bien Y.

$$\partial U/\partial X = \lim_{\Delta X \to 0} \Delta U/\Delta X > 0$$

Pour n biens les dérivées partielles sont positives $\partial U/\partial Qi > 0$ pour i =1…n

La fonction d'utilité est donc croissante par rapport à la quantité consommée.

d. La dérivée partielle ∂U/∂X est égale à l'utilité marginale de X

La dérivée partielle $\partial U/\partial X$ C'est égale à l'utilité marginale qui représente l'augmentation de l'utilité provoquée par une augmentation infiniment petite de la quantité consommée de X ($\Delta X \rightarrow 0$)

e. La fonction d'utilité est par hypothèse concave, ou au moins quasi-concave

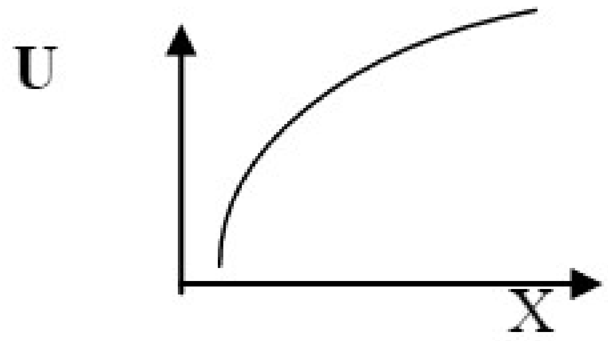
La loi de l'utilité marginale décroissante dit que lorsque la quantité consommée de bien X augmente, la satisfaction du consommateur augmente (l'utilité marginale est positive) mais elle augmente à un taux décroissant (l'utilité marginale est décroissante).

La variation de la variation est négative

La dérivée seconde est donc négative pour X : $\partial (\partial U/\partial X) / \partial X = \partial^2 U/\partial X^2 < 0$

Pour n biens $\partial (\partial U/\partial Qi) / \partial Qi = \partial^2 U/\partial Qi^2 < 0$ pour i allant de 1 à n

Donc la fonction d'utilité est croissante et concave



Une fonction concave ou quasi-concave est une fonction qui présente, par définition, un maximum.

(de même une fonction convexe ou quasi-convexe est une fonction qui admet par définition un minimum).

En terme économique une fonction d'utilité concave ou quasi-concave signifie qu'il existe une combinaison de consommation E (X,Y) telle que la satisfaction du consommateur est maximale.

3. Conclusion :

En micro-économie, la fonction d'utilité présente par hypothèse, 3 caractéristiques :

- elle est continue

elle est concave ou quasi-concave. Ce qui implique que

- elle admet un maximum
- elle est deux fois dérivable

B. HYPOTHESES SUR LES PREFERENCES

1. Le consommateur est capable de faire des choix et peut classer ses préférences.

Il doit être capable de classer l'ensemble des paniers par ordre de préférence. Ces paniers se caractérisent par des combinaisons différentes de bien X et de bien Y.

Entre deux choix A et B, le consommateur est capable de comparer A et B et peut dire s'il préfère A à B (A>B) ou s'il préfère B à A (B>A) ou encore s'il est indifférent entre les deux ($A \cong B$).

2. Les choix sont transitifs

$$\text{Si } A > B \text{ et } B > C \Longrightarrow A > C$$

Si le panier A est préféré à B et le panier B est préféré à C alors A est préféré à C. Cette hypothèse suppose une cohérence dans la comparabilité des paniers.

Les hypothèses émises sur les préférences sont donc:

- La nécessité de faire un choix et son caractère délibéré
- La substituabilité des biens.
- La comparabilité,
- La transitivité.
- La non satiété:
- l'utilité marginale décroissante

C. ILLUSTRATION

Supposons qu'un consommateur ne consomme que 2 biens X et Y et se voit présenter les paniers de consommation suivant : A(3X,18Y), B(5X,13Y), A'(6,18) et B'(8,13).

Le consommateur exprime ses préférences :

Il préfère A' à A car (selon l'hypothèse de la non saturation) A' contient la même quantité que A en Y mais elle contient 3 unités supplémentaire en X.

Mais le consommateur est indifférent entre A et B car les 2 paniers lui procurent la même satisfaction (100 utils)

Le panier A' et B' lui donnent la même satisfaction. Le consommateur est donc indifférent entre A' et B'.

Le consommateur a pu exprimer ses choix en regroupant les paniers qui lui procurent un niveau de satisfaction donné (100 utils) et ceux qui lui procurent un niveau plus élevé (150).

Pour les autres paniers, le consommateur s'est exprimé ainsi :

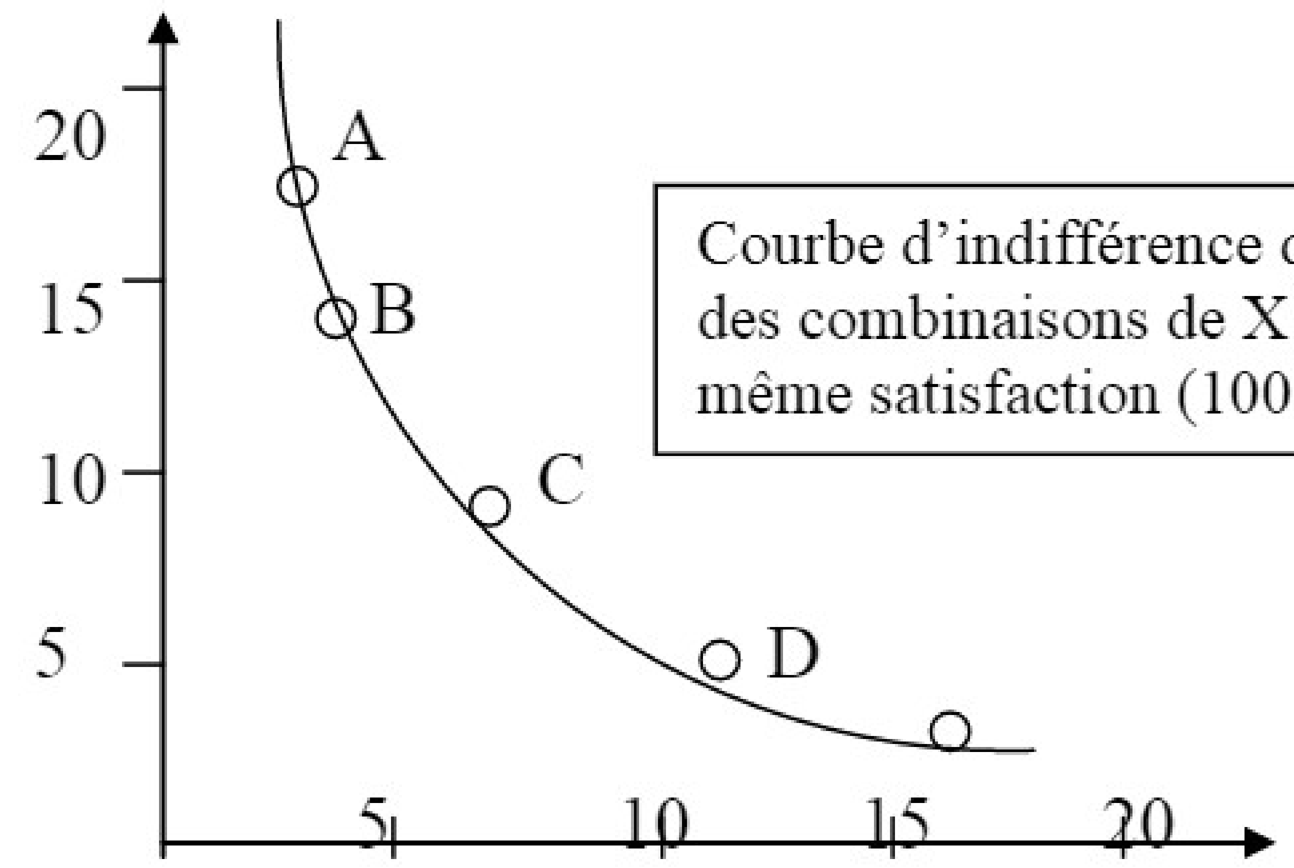
Paniers	X	Y	Utilité associée	TMS	Paniers	X	Y	Utilité associée	TMS
A	3	18	100	-	A'	6	18	150	-
B	5	13	100	5/2	B'	8	13	150	5/2
C	7	10	100	3/2	C'	10,5	10	150	3/2,5
D	11	6	100	1	D'	16	6	150	4/15,5
E	16	3	100	3/5	E'	26	3	150	3/10

- On remarque que les paniers A(3,18), B(5,13), C(7,10), D(11,6), E(16,3) lui procure la même satisfaction soit 100 utils.

Donc U est une constante (U = 100). Quel que soit le panier choisi l'utilité retirée est une constante.

- Il est indifférent entre ces paniers. On peut représenter graphiquement ce choix indiffèrent des paniers sous forme de courbe qu'on peut appeler courbe d'indifférence entre les paniers qui procurent 100 Utils :

On représente graphiquement les paniers, puis on lie les points de combinaison on obtient une courbe qui donne les différentes combinaisons de X et de Y qui procurent la même satisfaction au consommateur, soit 100 utils.



- Tout au long de cette courbe l'utilité ne change pas. Donc dU = 0
- L'équation de la courbe est de la forme de Y =f (X) pour U = 100
- Cette courbe a une pente négative. Si X augmente, Y diminue puisque la satisfaction est constante. Si X augmente et Y augmente ou stagne alors d'après l'hypothèse de la non saturation la satisfaction doit augmenter. Donc sur une même courbe d'indifférence (même niveau d'utilité) si X augmente Y doit diminuer et si X diminue Y doit augmenter pour garder la même satisfaction.
- Cette pente de la courbe d'indifférence est mesurée par $\Delta Y/\Delta X$

la pente de l'arc AB = $(Y_B - Y_A) / (X_B - X_A) = \Delta Y/\Delta X = (13\text{-}18) / (5\text{-}3) = -5/2$

- La pente de la courbe d'indifférence varie en chaque point de la courbe. Cette pente représente un taux d'échange de Y par X càd de combien remplacer une perte d'unité de X par des Y pour garder la même satisfaction. Ce taux s'appelle le taux marginal de remplacement de X par Y (ou de substitution) noté TMSy/x
- Le TMS est de signe négatif. Par convention on prend la valeur absolue pour faciliter l'interprétation économique;
- Le TMS est décroissant de A à B TMS = 5/2 ; de B à C TMS = 3/2
  de C à D TMS = 1 de D à E TMS = 3/5

A mesure que l'on descend le long de la courbe d'indifférence, le consommateur est de moins en moins disposer à renoncer à Y pour obtenir une unité supplémentaire de X. Ce qui explique que le TMS est décroissant.

En effet moins il y a de Y plus il a de X càd plus le point choisi est proche de l'origine et plus les unités restantes de Y ont tendance à se valoriser, alors que celle de X ont au contraire tendance à perdre de leur valeur à ses yeux. Par conséquent, l'individu est de moins en moins disposé à renoncer au bien Y chaque unité supplémentaire de X et le TMS est décroissant.

- Maintenant, on peut représenter graphiquement les paniers A', B', C', D', E' qui procurent au consommateur un niveau de satisfaction plus élevé. Cette courbe d'indifférence donne les différentes combinaisons qui procurent au consommateur un niveau d'utilité 150 utils.

Ainsi de suite, on peut obtenir plusieurs courbes d'indifférences classées et hiérarchisées selon le niveau de satisfaction.

L'ensemble de ces courbes d'indifférence donne une carte d'indifférence.

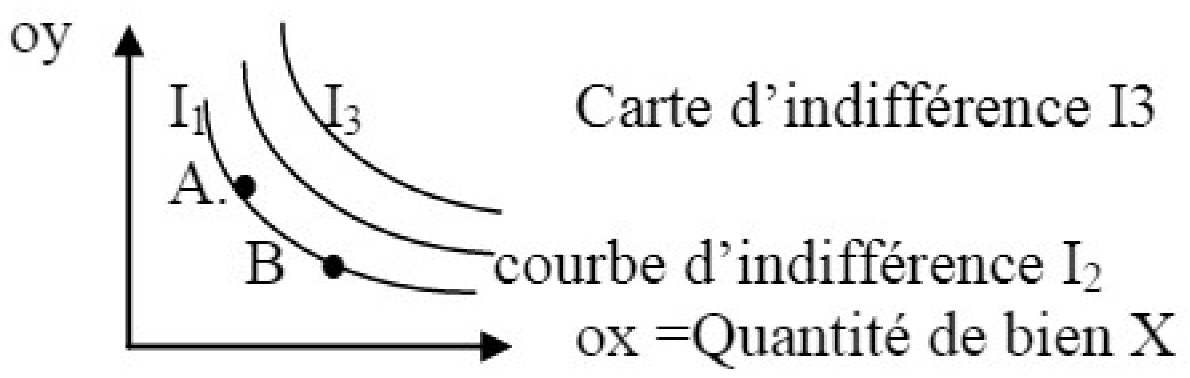
D. Definition et proprieste d'une courbe d'indifference

1. Définition

Une courbe d'indifférence représente l'ensemble des combinaisons possible de consommation de deux biens X et Y (La combinaison A ou B par exemple) qui procure au consommateur un niveau d'utilité identique.

Une courbe d'indifférence est le lieu des combinaisons de quantités de biens procurant un même niveau d'utilité.

Le niveau d'utilité U est le même quant on se déplace le long d'une courbe d'indifférence. L'utilité augmente quant on passe d'une courbe d'indifférence à une autre courbe plus élevée. Pour un même individu, il existe une infinité de courbes d'indifférence, chacune correspondant à un niveau de satisfaction différent. L'ensemble de ces courbes d'indifférence est appelé « carte d'indifférence ». Il existe autant de cartes d'indifférence que d'individus.



2. Propriétés :

Les courbes d'indifférence possèdent 5 propriétés :

- Le long d'une courbe, la variation d'utilité totale est nulle : $dU = 0$
- Une courbe d'indifférence a une pente négative. Ceci dérive de l'axiome de comportement selon lequel le consommateur préfère toujours plus.
- Une courbe d'indifférence est convexe par rapport à l'origine.
- Les courbes d'indifférence ne peuvent se couper.
- Plus les courbes d'indifférences sont éloignées de l'origine, plus le niveau est élevé.

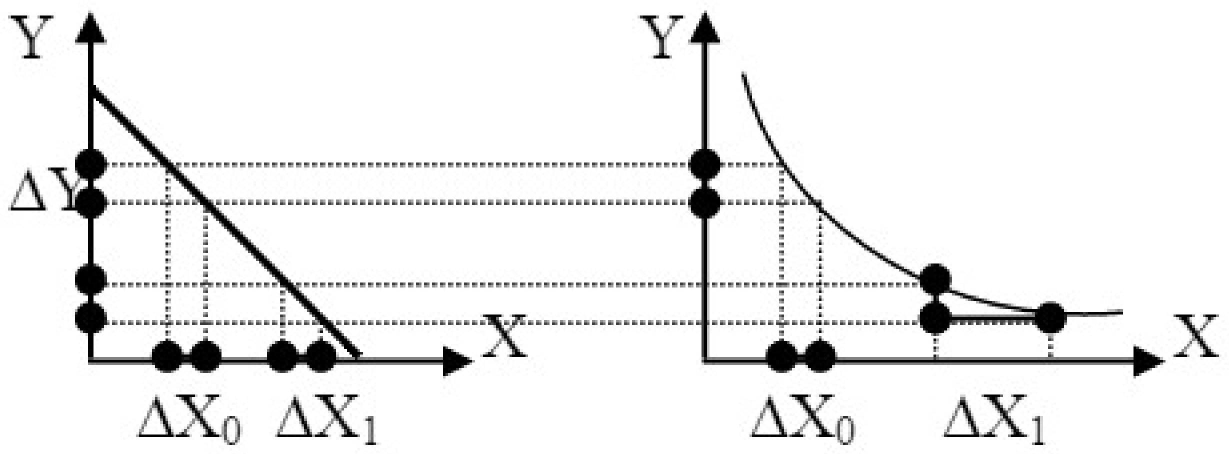
a. Les courbes d'indifférence sont décroissantes (de gauche à droite):

les courbe d'indifférence ont une pente négative. En effet, sur le long de la courbe, il existe une relation « inverse » ou décroissante » ou « négative » entre X et Y : si X augmente, Y diminue et inversement. Par conséquent la pente $\Delta X/\Delta Y$ de la courbe d'indifférence est négative.

Pourquoi quant X augmente , Y doit diminuer ? parce que l'individu rationnel ne pousse pas sa consommation d'un bien jusqu'à dépasser le point S où l'utilité marginale est négative, puisque au delà de S l'utilité totale décroît ($U\downarrow$). Si on admet que le consommateur rationnel ne dépasse jamais S, on suppose que l'utilité marginale est toujours positive. Donc si Y diminue alors l'utilité totale diminue, il faut donc augmenter X pour garder le même niveau de satisfaction. Et inversement, si Y augmente, l'utilité totale augmente, il faut alors réduire X pour avoir une utilité totale stable .
La décroissance de la courbe d'indifférence s'explique donc par le fait que les utilités marginales de X et de Y sont supposées positives en raison de la rationalité des comportements des agents économiques et en raison de l'hypothèse de non-satiété.

b. Les courbes d'indifférence sont convexes (par rapport à l'origine des axes)

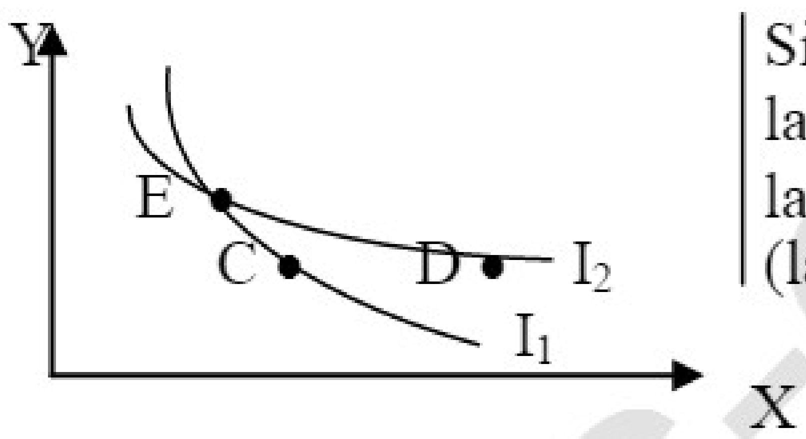
Les courbes d'indifférences ne sont pas droites mais courbées vers le bas : leur inclination diminue progressivement de gauche à droite.



- Le long d'une droite une baisse de Y de ΔY suppose, pour avoir une utilité inchangée, une augmentation de X de ΔX. L'Um $\Delta Y/\Delta X$ (la pente) est constante quelque soit le niveau.
- Le long d'une courbe convexe, une même diminution de Y (ΔY) ne peut être compensée que par une quantité croissante du bien X.($\Delta X > \Delta Y$). Ceci s'explique par la décroissance de l'utilité marginale (Um). Quand on substitue du bien X au bien Y, Y est de plus en plus rare, donc l'Um de Y augmente. Seule une quantité croissante de l'autre bien pourrait maintenir la satisfaction inchangée, d'autant que, X étant de plus en plus abondant, son Um diminue.
- Si les courbes d'indifférence n'étaient pas convexes, le consommateur limiterait son choix à un seul bien ou son choix serait indéterminé.

c. Les courbes d'indifférence ne se coupent pas :

-



Si I_1 et I_2 se coupent au point E, point d'intersection entre la courbe I_1 et I_2, C et D devraient, par définition, procurer la même satisfaction que E ;or c'est impossible puisque D>C (la combinaison D donne une satisfaction supérieure que C)

Deux courbes d'indifférence ne peuvent se croiser ni se toucher en un ou plusieurs points ; elles ne peuvent avoir un ou plusieurs points en commun.

Supposons que deux courbes d'indifférence aient un point en commun : alors cela signifie qu'un panier aurait 2 niveaux de satisfaction différente. Ce qui est contraire à la définition de l'utilité où à chaque panier correspond un seul niveau de satisfaction.

d. L'hypothèse de la non-saturation implique, de plus, que la satisfaction du consommateur augmente lorsqu'il passe d'une courbe d'indifférence à une autre plus éloignée de l'origine.

En effet lorsqu'on s'éloigne de l'origine, on obtient des paniers de consommation contenant des quantités de biens plus importantes, ce qui, d'après l'hypothèse de la pente négative des courbe, accroît le niveau de satisfaction.

3.Application

Soit la fonction d'utilité suivante : $\boxed{X^{1/2}\,Y^{1/2}}$

Donner les caractéristiques de la courbe d'indifférence.

On pose U = c (c étant une constante) $\Longrightarrow$

$\boxed{Y = c^2 / X}$ C'est l'équation de la courbe d'indifférence du niveau c

La courbe d'indifférence est une hyperbole équilatère, définie dans chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

La courbe d'indifférence est décroissante car c>0. Elle n'a de signification économique que pour X et Y positifs.

Elle n'est pas définie pour X = 0.

On peut démontrer que cette courbe d'indifférence est décroissante et convexe par rapport à l'origine câd démontrer qu'elle répond bien aux caractéristiques admises pour une courbe d'indifférence, il suffit pour cela d'étudier les signes et dérivées.

$dY/dX = - c^2 X^{-2} < 0 \Longrightarrow$ la courbe d'indifférence est décroissante

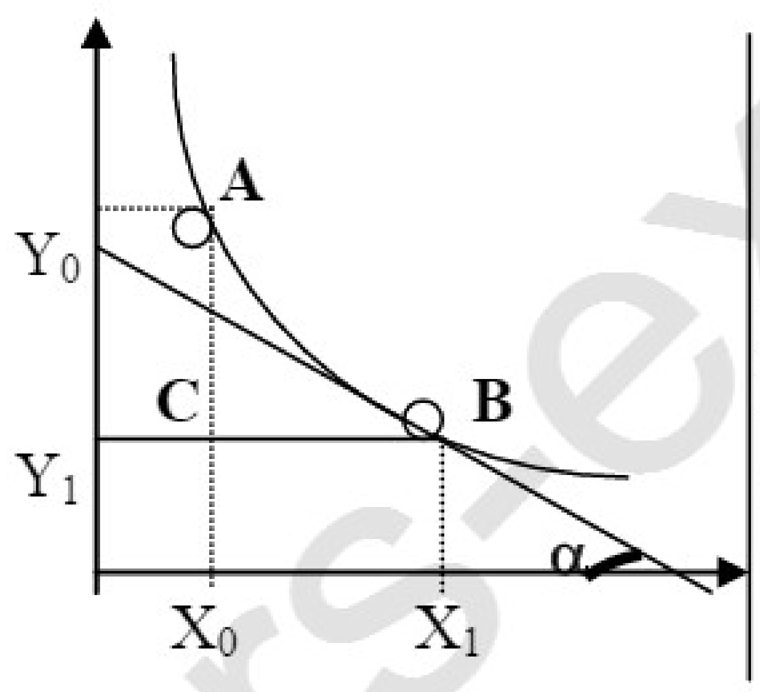
$d^2Y/dX^2 = 2 c^2 X^{-3} > 0 \Longrightarrow$ la courbe d'indifférence est convexe par rapport à l'origine des axes

E. Le taux marginal de substitution :

1. Définition :

La substitution consiste à remplacer une chose par une autre, sans changement par ailleurs. Dans la théorie de l'utilité ordinale, le consommateur, étant indifférent entre plusieurs paniers, peut substituer un bien par un autre à condition de maintenir identique son niveau de satisfaction.

la forme des courbes d'indifférence est déterminée par le rythme auquel le bien Y et le bien X sont échangés le long de ces courbes. Ce rythme ou taux d'échange entre X et Y est appelé taux de substitution.



panier $A=(OX_0,OY_0)$
panier $B=(OX_1,OY1)$
si le consommateur veut obtenir X_0X_1 en plus, il doit Renoncer à Y_0Y_1 (pour la même satisfaction)
Le taux auquel ce consommateur est disposé à substituer Y par X s'écrit :
$(OY_0-OY_1) / (OX_1-OX_0) = AC/CB = |\Delta Y/\Delta X|$

$\boxed{TMS = \Delta Y/\Delta X = \text{Pente } \alpha}$

> Le taux marginal de substitution est la petite quantité d'un bien que l'on soit prêt à sacrifier pour obtenir une unité supplémentaire d'un autre bien, l'utilité totale demeurant constante.
>
> Le taux marginal de substitution (TMS) entre deux biens Y et X mesure la variation de la quantité consommée du bien Y qui est nécessaire, le long d'une courbe d'indifférence, pour compenser une variation infiniment petite (infinitésimale) de la quantité consommée du bien X

Le TMS varie en chaque point et est continuellement décroissant. D'un point de vue mathématique, le TMS est mesuré par la dérivée de Y par rapport à X câd la pente en un point de la courbe d'indifférence.

Les caractéristiques du TMS sont :

- Le TMS est négatif. Ce ci découle du fait qu'il est la valeur absolue de la pente d'une courbe d'indifférence.
- Le TMS varie le long d'une courbe d'indifférence puisqu'il est la valeur absolue de la pente en un point d'une telle courbe. . Le TMS est donc variable.
- Le TMS est décroissant

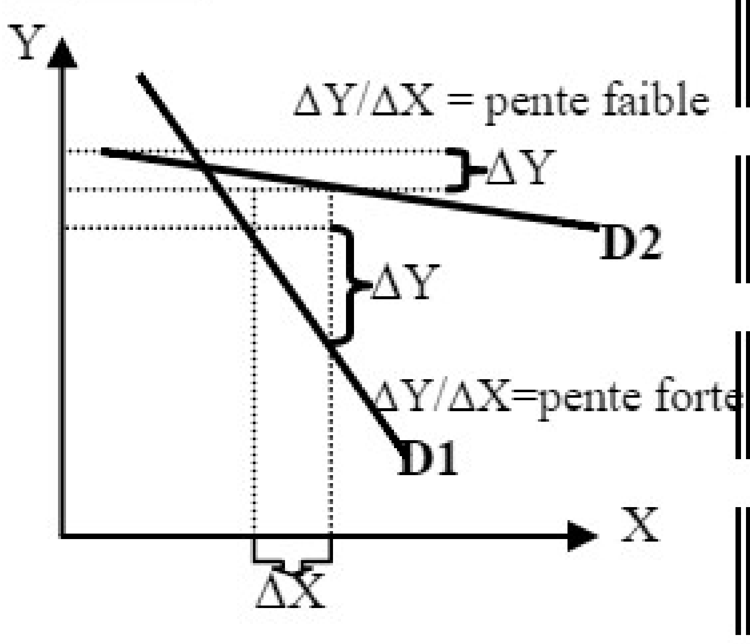
Par convention on définit le TMS avec un signe (-) en sorte que le TMS soit positif ou on prend la valeur absolue

$$\boxed{TMS = (-)\ dY/dX \text{ ou } TMS = \left| dY / dX \right|}.$$

Le TMS = 3 signifie qu'au point de la courbe d'indifférence où est effectué le calcul, une augmentation "«marginale » (tendant vers 0) de X nécessite une diminution de 3 unités de la quantité consommée de Y, si l'on veut maintenir la satisfaction inchangée.

Le TMS est un indicateur psychologique, il montre de quelle manière, l'individu acceptera de substituer du bien X à du bien Y.

Rappel mathématique :
la pente



Sur cette figure, on suppose une relation linéaire (représentée par une droite) entre le bien Y et le bien X. La droite D1 a une forte pente ou inclination, et la droite D2 a une très faible pente. Concrètement cela implique que Y diminue très vite le long de D1 et très lentement le long de D2 lorsque X augmente

Mesurer la pente de ces droites revient donc à mesurer « la vitesse » à laquelle Y varie en réaction à une variation donnée de X. On mesure cette vitesse ou « pente » en faisant le rapport entre une variation de Y et celle de X, entre deux points quelconques.

$$\boxed{\text{Pente} = \Delta Y / \Delta X}$$

On voit sur la figure que ce rapport est, en valeur absolue, nettement plus élevé pour D1 que pour D2

De la pente à la dérivée

Une droite se distingue d'une courbe par la constance de sa pente. Le rapport $\Delta Y / \Delta X$ est identique entre deux points quelconques de la droite.

Si on prend deux points tellement proches qu'à la limite on peut considérer comme pratiquement confondus, on calcule « la pente en un point ». Cette pente en un point n'est autre que la dérivée de Y par rapport à X. En effet elle mesure la variation de Y pour une variation infiniment petite de X ($\Delta X \longrightarrow 0$)

Le long d'une droite, la pente en un point (la dérivée) est constante et identique à la pente entre deux points quelconques, ou encore : $\Delta Y / \Delta X = dY/dX$.

Ce résultat n'est plus vérifié le long d'une courbe. La pente de la courbe varie en chaque point. La valeur absolue de la pente diminue le long d'une courbe convexe et augmente le long d'une courbe concave. Le calcul de la pente d'une courbe n'a plus de sens. Le seul indicateur de Y est la dérivée, que l'on peut considérer comme « la pente en un point » de la courbe. Mathématiquement, on dit « la pente de droite tangente à la courbe en ce point ».

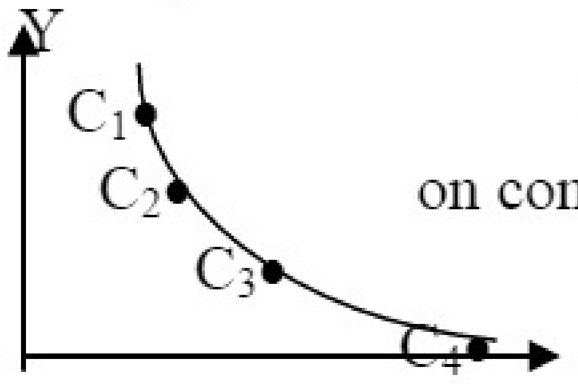
2. Propriétés :

a. **la propriété de décroissance du TMS**

La convexité des courbes d'indifférence entraîne la conséquence fondamentale qu'est la décroissance du TMS lorsque la consommation de bien X s'accroît.

La valeur absolue du TMS est une fonction décroissante de la quantité de bien représentée en abscisse.

Plus forte est la dotation en un bien, plus élevée sera la variation donnée de ce bien nécessaire à compenser une variation donnée de l'autre bien.



$TMS_1 = \Delta Y_1/\Delta X_1$ $\quad$ $TMS_2 = \Delta Y_2/\Delta X_2$

on constate que $|\Delta Y_1| > |\Delta Y_2|$ et $|\Delta X_1| < |\Delta X_2| \Longrightarrow |TMS_1| > |TMS_2|$

b. relation entre TMS et Um :

La fonction d'utilité U = f(X,Y) exprime l'idée que l'UT perçue par le consommateur et la satisfaction qui en découle dépendent des consommations.

Les changements de combinaisons de consommation affectent par conséquent l'UT. L'impact des changements de consommation sur l'UT se mesure par la différentielle dU de la fonction d'utilité

$$\boxed{\mathbf{dU = \partial U/\partial X \,.\, dX \;+\; \partial U/\partial Y \,.\, dY \iff dU = Um(X)\, dX \;+\; Um(Y) \,.\, dY}}$$

$\partial U/\partial X$ est la dérivée partielle de la fonction d'utilité par rapport à X. elle représente l'Um de la consommation de bien X

dX représente la variation de consommation de bien X

Lorsque les changements de combinaison s'effectuent sur la même courbe d'indifférence, l'utilité reste constante de sorte que dU=0 d'où $\Longrightarrow$

$$\partial U/\partial X \,.\, dX = - \,\partial U/\partial Y \,.\, dY \quad TMS = dY/dX = -\frac{\partial U/\partial X}{\partial U/\partial Y} \quad \text{câd} \quad \frac{UmX}{UmY} = -\frac{dY}{dX}$$

Le TMS est égal au rapport des utilités marginales affecté de signe-

3. Application

Soit la fonction d'utilité : $\boxed{2\, X^{1/2}\, Y^{1/2}}$

Sur U=Cte , on aura

dU = 0 $\qquad 0 = \partial U/\partial X \,.\, dX + \partial U/\partial Y \,.\, dY$

$\partial U/\partial X = (Y/X)^{1/2}$

$\partial U/\partial Y = (X/Y)^{1/2}$

TMSxy = - Y/X

<u>Rappel mathématique</u> : Les différentielles ; Les dérivées partielles

La différentielle est un calcul d'accroissements. Il ne faut pas confondre avec la dérivée, qui est un rapport entre deux accroissements.

1. Soit une fonction à une seule variable : $y = f(x)$

La différentielle de y, notée dy, est la variation de y due à une petite variation de x.

La dérivée première de la fonction, qui est la limite du rapport $\Delta y/\Delta x$ lorsque Δx tend vers 0, s'écrit : $y' = dy/dx$ la différentielle est : $dy = dy/dx \cdot dx$

2. La différentielle totale et les dérivées partielles

Lorsqu'une fonction a deux variables ou plus, par exemple $y = f(x,z)$, la différentielle totale de y est dy qui est la variation de y due à de petites variations de x et de z, notées dx et dz. Elle a pour expression /

$$dy = \partial y/\partial x \cdot dx + \partial y/\partial z \cdot dz$$

où $\partial y/\partial x$ et $\partial y/\partial z$ sont les dérivées partielles de y par rapport à x et à z.

Dans une fonction à plusieurs variables, la dérivée partielle mesure la variation d'une variable indépendante, câd x ou z dans la fonction $y = f(x,z)$, les autres variables indépendantes demeurant constantes.

Ainsi, $\partial y/\partial x$ mesure la variation de y, variable dépendant , occasionnée par un changement infinitésimal de x, z restant constant..

3. Interprétation économique de la pente de la courbe d'indifférence

Soit la fonction d'utilité $U = U(X,Y)$

Si X et Y varie simultanément, la variation totale de l'utilité est :

$$dU = \partial U/\partial X \cdot dX + \partial U/\partial Y \cdot dY$$

$$dU = Um(X)\, dX + Um(Y) \cdot dY$$

$\partial U/\partial X = Um(X)$ et $\partial U/\partial Y = Um(Y)$

sur une courbe d'indifférence l'utilité est constante ($U = Uo$). La dérivé d'une constante est 0

$dUo = 0 \Longrightarrow Um(X)\, dX + Um(Y) \cdot dY = 0$

$dY/dX \quad U{=}Uo \quad = - Um(X) / Um(Y)$

La pente de la courbe d'indifférence en un point est égale au rapport des utilités marginales des deux biens X et Y en ce point multiplié par (-1)

La condition d'équilibre s'écrit :

$$- Px/Py = - Um(X) / Um(Y) \quad \text{ou } Um(X) / Px = Um(Y) / Py$$

A l'équilibre, les utilités marginales de la dépense sur chacun des biens sont égales. C'est la règle de Gossen.

Tant que le consommateur retire une plus forte utilité marginale de la dépense sur X que sur Y (Um(X) > Um(Y)}, il augmente sa demande de X au détriment de la demande de Y. Il s'ensuit une baisse de l'utilité marginale de X et une augmentation de l'utilité marginale de Y.

L'optimum est atteint lorsque l'utilité marginale de la dépense est la même pour chacun des biens ; l'utilité du dernier dinar dépensé sur chaque bien est la même.