CHAPITRE N° 3

LE CHOIX D'INVESTISSEMENT EN AVENIR ALEATOIRE ET LA FONCTION D'UTILITE

I. Introduction à la théorie des décisions individuelles.

I.1. Présentation du cadre théorique.

Dans un environnement incertain, l'incertitude peut provenir de deux sources :

- la première, est liée à l'existence d'autres agents dont les décisions peuvent avoir un impact sur les conséquences des décisions prises par l'agent ou l'investisseur considéré. A titre d'exemple, les résultats d'une entreprise qui n'est pas en situation de monopole dépendent des conséquences des décisions prises par les entreprises concurrentes sur le marché. L'existence de telles interactions, fait qu'aucun investisseur ne connaît avec certitude et à l'avance, les conséquences de ses propres choix du moins, tant qu'il ignore les choix faits par les autres... Le traitement de cette forme d'incertitude se fait dans le cadre de la théorie des jeux : dans ce cas, chaque investisseur « joue » contre un adversaire ;
- la seconde source d'incertitude est souvent exogène aux investisseurs dans ce sens où elle n'est contrôlée par aucun d'entre eux et dépend simplement du pur hasard. Le traitement de cette forme d'incertitude se fait dans le cadre de la théorie des décisions individuelles : l'investisseur « joue » dans ce cas, contre la nature…

La résolution des problèmes de choix d'investissement en avenir incertain se fait dans le cadre de la théorie des décisions individuelles, qui nécessite la définition :

- d'une part, de la liste des décisions qui s'offrent à l'investisseur. Dans le langage de la théorie des décisions individuelles, ces décisions sont appelées lignes d'actions. Appliquées au domaine du choix d'investissement, elles consistent pour l'agent à choisir entre les trois actions suivantes : investir, désinvestir ou ne rien faire ;
- et d'autre part, l'ensemble des événements qui risquent de prévaloir au moment où les actes de l'investisseur devront porter leurs effets. Dans le langage de la théorie des décisions individuelles, ces événements sont appelés états de la nature et sont supposés être parfaitement définis (même si on ne sait pas lequel d'entre eux va se réaliser), mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs.

I.2. La fonction d'utilité et les axiomes de rationalité.

Nous avons montré dans le chapitre 2, comment les investisseurs étaient sensibles non seulement au rendement (mesuré par la richesse espérée), mais également au risque (mesuré par l'écart type). La théorie des décisions individuelles permet de tenir compte simultanément de ces deux critères à travers l'attribution à chaque investisseur rationnel, d'une fonction qui traduit ses préférences en matière de rendement et de risque, appelée fonction d'utilité.

La qualité d'investisseur rationnel n'est attribuée à un investisseur que s'il vérifie toute une série de règles comportementales résumées en un certain nombre d'axiomes, dits axiomes de rationalité et dont les principaux sont les suivants :

<u>Axiome 1 : Axiome de complétude.</u>

Placé devant un choix risqué (souvent appelé loterie), l'investisseur est toujours capable de décider :

- il préfère la loterie l_1 à la loterie l_2 si la 1ère lui procure davantage de satisfaction ; on note : $l_1 \succ l_2$;
- il préfère la loterie l_2 à la loterie l_1 si la 2nde lui procure davantage de satisfaction ; on note : $l_2 \succ l_1$;
- il est indifférent entre l_1 et l_2 si les deux loteries lui procurent la même satisfaction ; on note : $l_1 \equiv l_2$ ou $l_1 \sim l_2$.

<u>Axiome 2 : Axiome de transitivité.</u>

Les relations de préférence de l'investisseur sont transitives :

Si $l_1 \succ l_2$ et $l_2 \succ l_3$
alors $l_1 \succ l_3$

<u>Axiome 3 : Axiome de non-satiété.</u>

Les investisseurs préfèrent toujours plus de richesse à moins de richesse.

<u>Axiome 4 : Axiome de continuité des préférences.</u>

Si on a trois loteries l_1, l_2, et l_3, telles que $l_1 \succ l_2$ et $l_2 \succ l_3$, alors il $\exists$ une probabilité p, telle que :

$$l_2 \equiv p.l_1 + (1 - p).l_3$$

Le symbole $\equiv$ désigne le fait que l'agent est indifférent entre jouer à l_2, une loterie certaine, ou à une combinaison de l_1 et l_3, du moment qu'elles lui procurent toutes les deux la même satisfaction. On en déduit qu'il existe pour toute loterie, une somme de monnaie, appelée équivalent certain, telle que l'agent est indifférent entre jouer à la loterie ou recevoir son équivalent certain, ce dernier étant bien entendu inférieur au gain espéré (risqué) des loteries.

<u>Axiome 5 : Axiome d'indépendance.</u>

Soient deux loteries l_1 et l_2 telles que : $l_1 \succ l_2$. Alors $\forall$ l_3 et $\forall$ $0 < p < 1$, on a :

$$p.l_1 + (1 - p).l_3 \succ p.l_2 + (1 - p).l_3$$

Cet axiome indique que si un agent préfère un gain G1 à un gain G2, alors il préfère nécessairement une loterie qui lui permettrait de gagner G1 à une autre qui lui permettrait de gagner G2.

II. Définition et construction des fonctions d'utilité.

II.1. Définition.

Si l'individu vérifie tous les axiomes de rationalité, alors il ∃ une fonction U, dite fonction d'utilité / :

$$U : \text{Ensemble des loteries} \rightarrow IR$$
$$l \mapsto U(l)$$

et on a alors : $l_1 \succ l_2$ ssi $U(l_1) > U(l_2)$

Les fonctions d'utilité sont donc toujours croissantes et on dit qu'il y a conservation des préférences individuelles : étant donné qu'on préfère la loterie qui donne le plus de gains possibles, on préfère aussi celle qui a l'utilité la plus grande.

Remarque :

En avenir certain, une fonction d'utilité est définie à une fonction croissante près, c'est à dire que si U est une fonction d'utilité, alors $V = \rho.U$, est aussi une fonction d'utilité qui conserve les préférences de l'individu, pour peu que ρ soit croissante.

Exemple : $V = U^2$

Par contre, en avenir incertain, une fonction d'utilité n'est définie qu'à une fonction linéaire croissante près.

Exemple : $V = a + b.U$ avec $b > 0$

Ainsi, il n'est pas important de connaître U, mais plutôt le choix qu'elle induit (axiome 5).

II.2. Construction des fonctions d'utilité.

D'après Von Neumann et Morgenstern (1944), si l'on considère une loterie l telle que :

$$l \begin{cases} w_1 & p_1 \\ \dots & \\ w_i & p_i \\ \dots & \\ w_n & p_n \end{cases}$$

où :

- w_i = la richesse
- p_i = la probabilité de réalisation de la richesse w_i

$$\Rightarrow \quad U(l) = p_1.U(w_1) + p_2.U(w_2) + \dots + p_n.U(w_n) = E(U(w_i))$$

La formule ci-dessus a pour conséquence, que tout investisseur qui cherche à maximiser son utilité, cherche en fait à maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse.

III. Identification des comportements des investisseurs en matière de risque.

III.1. Nécessité de prise en compte de la richesse initiale.

Les exemples de loteries que nous avons considérées jusque là, se basaient sur le gain ou la perte générés par celles-ci sans prendre en compte la richesse initiale du joueur. Pourtant, il serait tout à fait sensé de penser que le comportement d'un joueur dépende de son niveau de fortune… Pour tenir compte de cet aspect, les loteries seront dorénavant conçues et construites de manière à ce que leur argument ne soit pas le gain généré par la loterie, mais la richesse finale à laquelle un tel gain conduirait.

III.2. Les attitudes des investisseurs vis-à-vis du risque.

Les investisseurs peuvent être classés en trois catégories, selon le comportement qu'ils ont vis-à-vis du risque. Nous distinguons ainsi, entre :

- des investisseurs qui sont averses au risque ;
- des investisseurs qui ont de la propension pour le risque ;
- et, des investisseurs qui sont neutres au risque.

Afin de mieux comprendre le comportement de ces différents investisseurs, nous allons analyser les choix de chacun d'eux face au risque impliqué par une même loterie, qui se présente comme suit : il s'agit de jouer à pile ou à face, avec la possibilité de gagner ou de perdre avec des chances égales, une petite somme h.

Ainsi, l'investisseur considéré, doté d'une richesse initiale w, a le choix entre les deux loteries suivantes :

	Gain / Probabilité	Richesse finale	Espérance / Variance
Ne rien faire	$\{0 \quad 1$	$\{w$	$E(l_1) = w$ $V(l_1) = 0$
Jouer	$\begin{cases} +h & ½ \\ -h & ½ \end{cases}$	$\begin{cases} w + h \\ w - h \end{cases}$	$E(l_2) = w$ $V(l_2) = h^2$

Le choix de l'une ou de l'autre des deux possibilités dépend bien entendu de la nature de l'investisseur.

III.2.1. Cas d'un individu averse au risque.

Un individu averse au risque, est un individu qui, toutes choses étant égales par ailleurs (notamment l'espérance des gains, comme dans le cas des loteries ci-dessus), préfère une loterie moins risquée à une loterie plus risquée : il optera donc pour le fait de ne rien faire (loterie l_1).

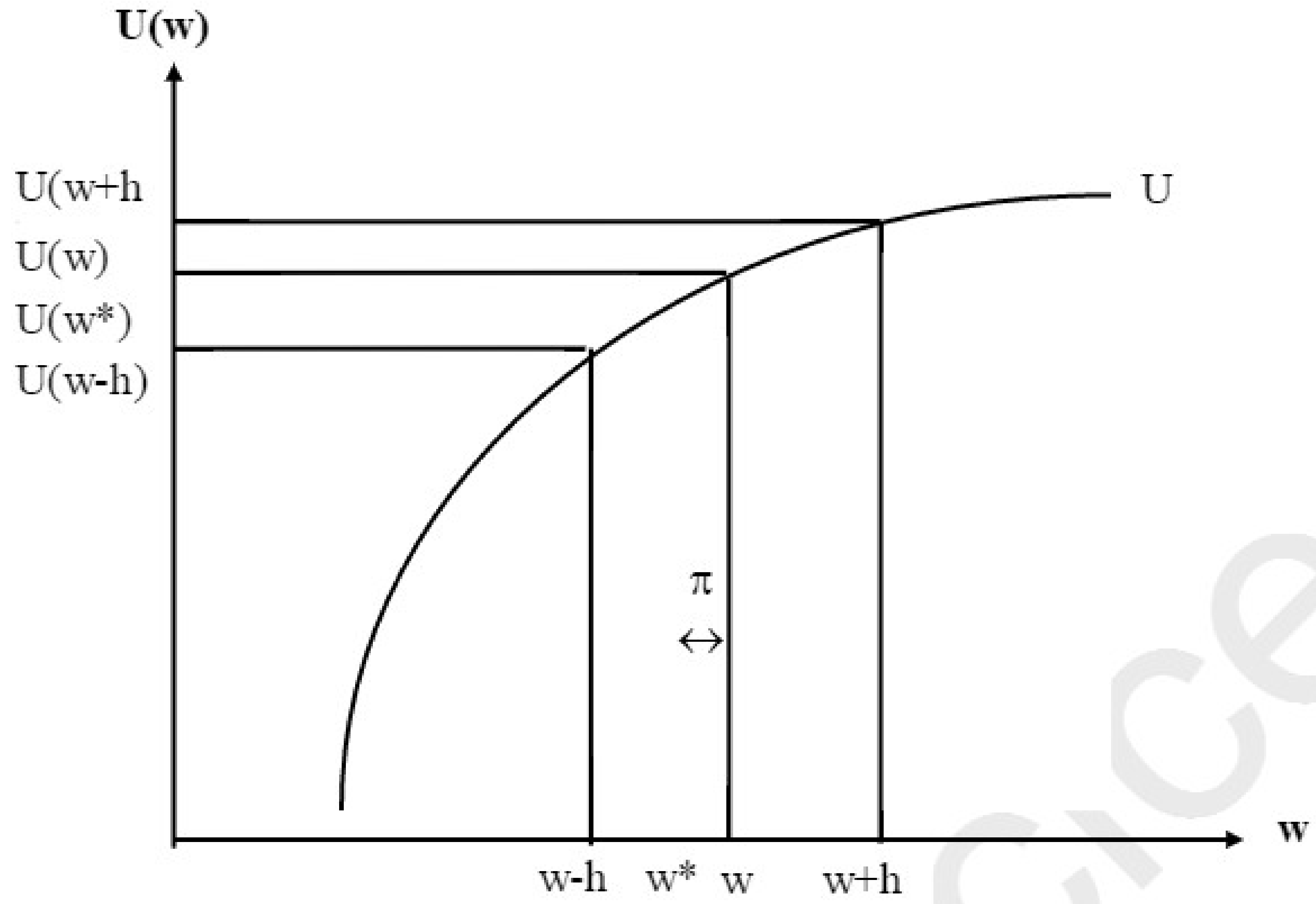
En introduisant la fonction d'utilité de l'investisseur, nous devons donc avoir :

$$U(l_1) > U(l_2)$$
$$\Rightarrow \quad U(w) > 1/2.U(w + h) + 1/2.U(w - h)$$
$$\Rightarrow \quad U(w) - U(w - h) > U(w + h) - U(w)$$

Par définition, cette inégalité traduit une fonction d'utilité concave : $U' > 0$ *et* $U'' < 0$:

- la première dérivée est nécessairement positive pour une fonction d'utilité, puisque tout individu préfère plus de richesse à moins de richesse ;
- par contre, le fait que la dérivée seconde soit négative, traduit par construction, une attitude d'aversion au risque de la part de l'investisseur.

Ainsi, la fonction d'un individu averse au risque peut être représentée comme suit :



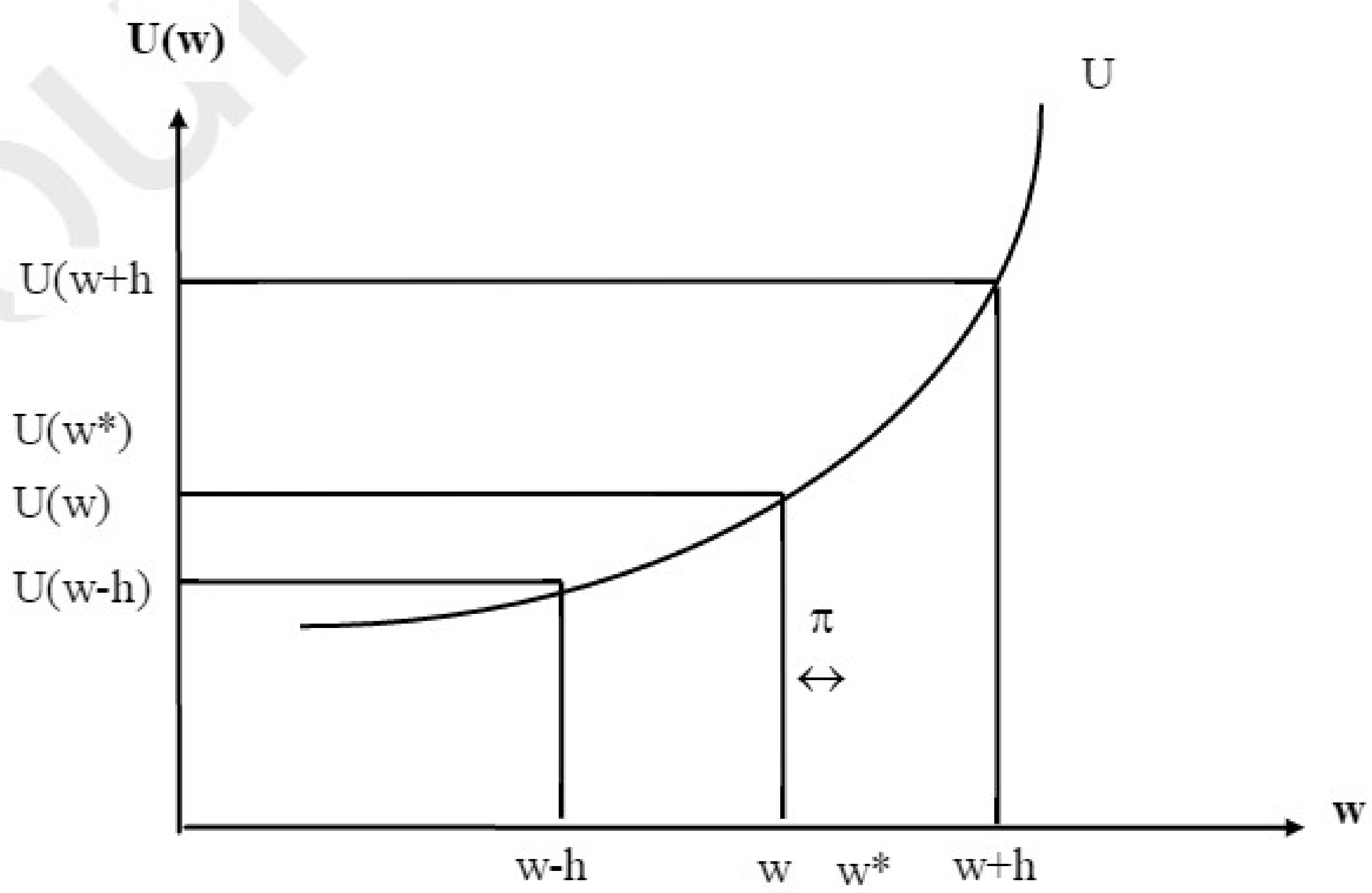
avec $\pi = w - w^* > 0$ (se référer à la section suivante pour la définition de π).

III.2.2. Cas d'un individu qui a de la propension pour le risque.

Un investisseur qui aime le risque, est un investisseur qui préfère la loterie à l'obtention avec certitude de la richesse moyenne, d'où : $U(l_2) > U(l_1)$, ce qui nous donne :

$$U(w) - U(w - h) < U(w + h) - U(w)$$

Cette inégalité traduit la convexité de la courbe d'utilité : $U' > 0$ *et* $U'' > 0$:



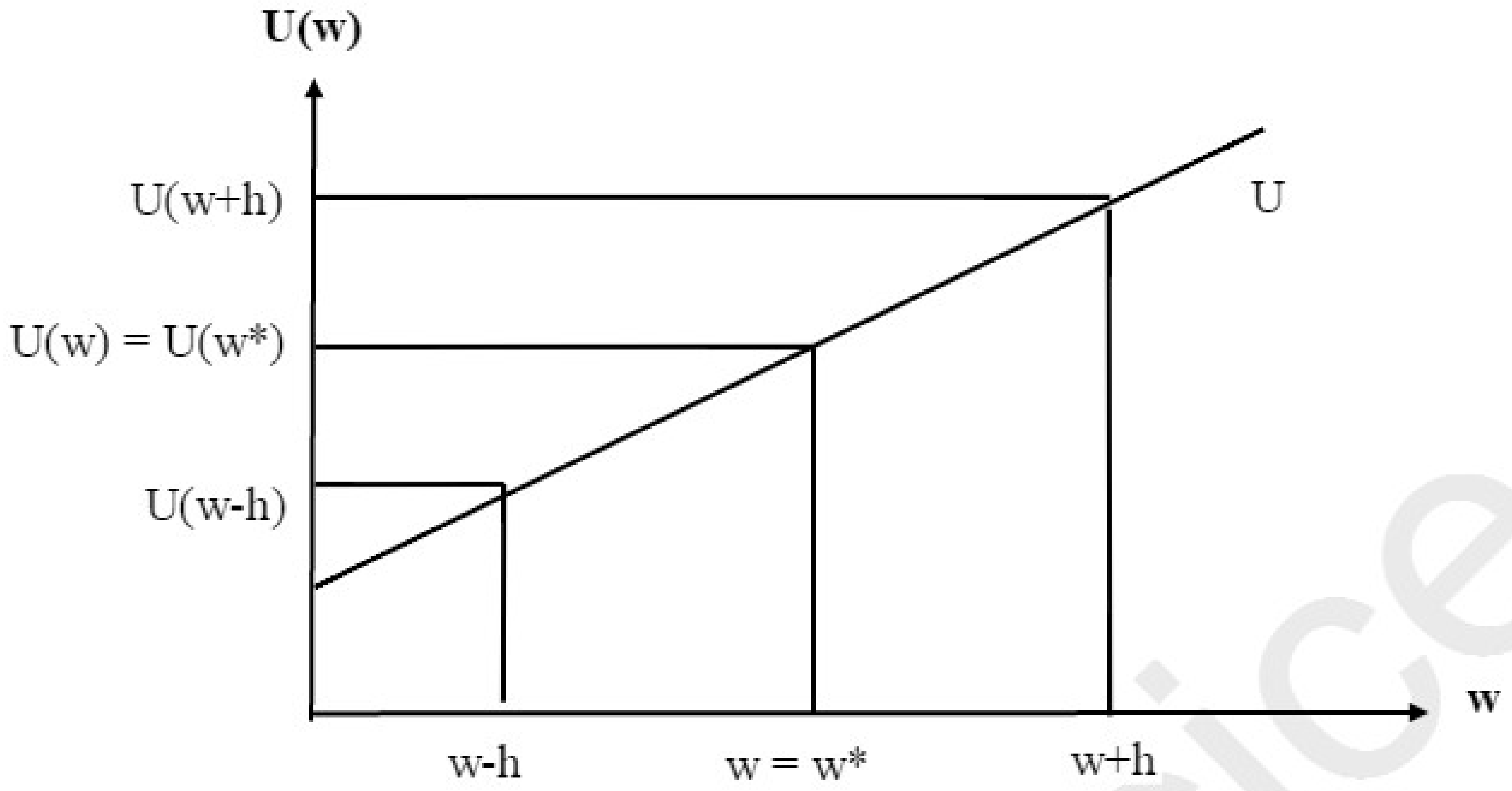
avec $\pi = w - w^* < 0$.

III.2.3. Cas d'un individu neutre au risque.

La neutralité vis à vis du risque, caractérise un agent qui est indifférent entre recevoir sans risque la richesse moyenne de la loterie, ou subir la loterie elle-même, d'où :

$$U(w) - U(w - h) = U(w + h) - U(w)$$

Nous avons alors, $U' > 0$ *et* $U'' = 0$, c.à.d. que la fonction d'utilité est une fonction linéaire :



avec $\pi = w - w^* = 0$.

IV. Notions d'équivalent certain et de prime de risque.

Si un agent a de l'aversion pour le risque, il préfère obtenir avec certitude une somme donnée (appelée équivalent certain), même si elle est inférieure à la somme qu'il peut espérer obtenir de la loterie, plutôt que de courir un risque en jouant. Un tel investisseur, est à la limite prêt à payer pour ne pas jouer. La somme qu'il est prêt à payer, est la différence qui existe entre la valeur espérée de la richesse de l'individu s'il accepte de jouer, et l'équivalent certain de sa richesse ; cette somme est appelée prime de risque et est notée par π.

Soit w*, l'équivalent certain du jeu proposé dans la section précédente. Par définition, nous avons :

$$w^* / : \quad U(w^*) = U(l_2)$$

$$\Rightarrow \quad U(w^*) = E(U(w_2)) = 1/2.U(w - h) + 1/2.U(w + h)$$

et : $\quad \pi = E(l_2) - w^*$

$$\Rightarrow \quad w^* = E(l_2) - \pi = w - \pi$$

$$\Rightarrow \quad U(w - \pi) = 1/2.U(w - h) + 1/2.U(w + h)$$

Afin d'obtenir l'expression de π, nous avons recours à un développement de Taylor[1], ce qui donne :

$$U(w - \pi) = U(w) - \pi.U'(w) + \pi^2/2.U''(w) - h^3 ... \text{ (pour } b = w - \pi \text{ et } a = w)$$

$$U(w - h) = U(w) - h.U'(w) + h^2/2.U''(w) - h^3 ... \text{ (pour } b = w - h \text{ et } a = w)$$

$$U(w + h) = U(w) + h.U'(w) + h^2/2.U''(w) + h^3 ... \text{ (pour } b = w + h \text{ et } a = w)$$

Ainsi, en approximant chacun des termes de l'égalité par un développement de Taylor limité au premier ordre pour le premier membre et au second ordre pour le deuxième membre, nous obtenons :

$$U(w) - \pi.U'(w) = ½.U(w) - h/2.U'(w) + h^2/4.U''(w) + ½.U(w) + h/2.U'(w) + h^2/4.U''(w)$$

Ce qui donne après simplification :

$$- \pi.U'(w) = h^2/2.U''(w)$$
$$\Rightarrow \quad \pi = (-h^2/2).[U''(w) / U'(w)]$$

Ainsi en matière d'identification du comportement d'un investisseur face au risque, nous pouvons conclure que si :

- $U''(w) < 0 \Rightarrow \pi > 0$: l'individu n'aime pas le risque et est prêt à payer pour ne pas jouer ;
- $U''(w) > 0 \Rightarrow \pi < 0$: l'individu aime le risque ; il faut le payer pour qu'il accepte de renoncer au jeu ;
- $U''(w) = 0 \Rightarrow \pi = 0$: l'individu est indifférent au risque.

Nous remarquons par ailleurs, que l'expression de la prime de risque se compose de deux éléments distincts qui sont :

- h^2, une mesure objective de la quantité de risque véhiculée par la loterie ;
- [-U''(w) / U'(w)], un rapport qui reflète l'allure de la fonction d'utilité, c'est à dire fondamentalement, le comportement de l'individu particulier considéré face au risque.

Ainsi, deux individus placés face à une même loterie et dotés de la même richesse initiale n'exigent pas la même prime de risque, s'ils ont des fonctions d'utilité différentes. Cette conclusion, nous incite à développer des mesures plus précises du risque individuel et à nous pencher également sur les changements qui peuvent avoir lieu au niveau du comportement de chaque individu si sa richesse initiale venait à changer.

[1] Développement de Taylor : Soit f une fonction définie sur [a, b] et dérivable n+1 fois sur]a, b[. Il existe alors c ∈]a, b[/ :

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)^1}{1!}.f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}.f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)} + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f(c)$$

Remarques :

1°- La formule ci-dessus ne peut être utilisée que lorsqu'on dispose d'une loterie de la même forme et avec les mêmes caractéristiques exactement que celle proposée dans la section précédente. Dans tous les autres cas, il faut utiliser la formule générale de la prime de risque, en passant par l'équivalent certain.

2°- Si au lieu d'utiliser, comme nous l'avons fait jusque là, des loteries additives, nous utilisons des loteries multiplicatives de la forme :

$$\begin{cases} W.(1 + h) & \frac{1}{2} \\ W.(1 - h) & \frac{1}{2} \end{cases}$$

où h représente, cette fois, un rendement exprimé en pourcentage de la richesse initiale, w, la prime de risque deviendrait :

$$\pi = (-h^2/2).[w.U''(w) / U'(w)]$$

V. Les mesures locales d'aversion pour le risque.

L'identification du comportement de l'individu face au risque ne nous renseigne pas sur son amplitude : deux individus averses au risque par exemple, peuvent l'être dans des proportions différentes. Pour cela, il est nécessaire de développer des mesures locales du risque, c'est-à-dire des mesures du degré d'attraction ou d'aversion au risque, faites pour un individu donné à un niveau de richesse donné.

Ces mesures présenteront le double avantage de nous permettre :

- d'une part, d'effectuer des comparaisons entre plusieurs individus dans le but de les classer du moins averse au plus averse ou inversement ;
- et d'autre part, d'étudier le comportement d'un même individu en fonction du niveau de richesse auquel il se situe.

A ce propos, la littérature financière a proposé de nombreuses mesures dont les deux plus célèbres restent celles élaborées par Arrow (1965) et Pratt (1964). Il s'agit de :

- l'aversion absolue au risque, une mesure du degré de risque, tirée de l'expression de la prime de risque d'une loterie additive ;
- et de l'aversion relative au risque, une mesure du degré de risque tirée de l'expression de la prime de risque d'une loterie multiplicative.

V.1. Aversion absolue au risque (AAR).

Le coefficient d'aversion absolue au risque (en référence à la variation en termes absolus de la richesse de l'investisseur), se définit par :

$$AAR = - U''(w) / U'(w)$$

Ce rapport décrit en réalité la forme de la fonction d'utilité de l'individu (concave, convexe ou linéaire) et son degré de courbure. Plus la convexité ou la concavité sont accentuées, plus le comportement de l'individu face au risque est marqué, qu'il s'agisse d'attraction ou d'aversion.

Concernant le signe de ce coefficient, il est facile à interpréter :

- si AAR > 0 $\Rightarrow$ l'individu est averse au risque ;
- si AAR < 0 $\Rightarrow$ l'individu est attiré par le risque ;
- si AAR = 0 $\Rightarrow$ l'individu est neutre face au risque.

Ainsi, si deux investisseurs, I_1 et I_2, ont des AAR positifs et que par ailleurs, nous avons : $AAR_1 > AAR_2$, nous pouvons aisément en conclure que le premier investisseur est plus averse au risque que le second.

Pour terminer, le coefficient d'aversion absolue au risque nous permet d'étudier la façon avec laquelle la demande d'actifs risqués évolue avec la richesse de l'individu :

- quand le coefficient AAR est une fonction croissante (décroissante) de la richesse, cela signifie que le montant investi en actifs risqués décroît (croît) avec w ;
- quand l'indice AAR est une fonction constante de w, le montant que l'investisseur est prêt à investir dans des actifs ou jeux risqués, est indépendant du niveau de sa fortune.

V.2. Aversion relative au risque (ARR).

Le coefficient d'aversion relative au risque d'Arrow-Pratt tient son nom du fait qu'il provient des loteries multiplicatives où les gains et pertes sont exprimés en pourcentage de la richesse initiale. Il se définit par :

$$ARR = - [U''(w) / U'(w)].w = AAR.w$$

Ce coefficient décrit la façon dont la proportion investie en actifs risqués évolue avec la richesse. Un indice décroissant par exemple, décrit un agent qui investit une proportion croissante de sa richesse en actifs risqués à mesure que sa richesse augmente.

V.3. L'aversion au risque dans la pratique.

En pratique, les études sur les indices d'aversion au risque prouvent que l'aversion absolue au risque des individus, décroît pratiquement toujours, avec leur richesse (ils sont donc prêts à risquer des sommes de plus en plus élevées en projets risqués quand ils sont plus riches), alors que leur aversion relative au risque est soit décroissante soit le plus souvent constante (ce qui implique qu'ils se fixent généralement un certain pourcentage de leur fortune, qu'ils ne dépassent pas en investissements risqués).