

II- Gestion budgétaire de production

Formulation de contraintes, résolution graphique, desserrement de contraintes

M. Viard fabrique et commercialise des fromages de brebis. Dans le cadre d'une étude globale de la performance de son exploitation, il se demande s'il ne peut pas mieux utiliser son outil de production. Pour vous permettre de lui donner votre avis, on vous communique un descriptif du processus de fabrication et un certain nombre de données relatives à l'exercice N-1 qui vous sont fournies en annexe.

A. M. Viard voudrait connaître le programme de production qui lui aurait permis en N-1 de maximiser sa marge sur coûts variables et donc son résultat.

1. Présenter sous forme canonique le programme linéaire reprenant les contraintes énoncées dans l'annexe et la fonction économique à maximiser.
2. Résoudre graphiquement ce programme.

B. Il serait possible d'accroître la production de fromage de brebis au-delà de l'optimum calculé en A., à condition d'agir sur les principales contraintes.

1. Si l'on avait augmenté cette production en confiant l'affinage de la production supplémentaire de fromage de brebis à un sous-traitant, au prix de 5 DH par kg, quels auraient été la marge sur coûts variables et le résultat maximal de la fromagerie ?

- Annexe : programme de production

L'entreprise fabrique trois types de fromages par tommes de 5 kg :

- le fromage de brebis (B) ;
- le fromage de vache (V) ;
- le fromage mixte brebis-vache (M).

- Données de N-1 :

Fromage	Production	Marge sur coût variable unitaire
B	5 800 tommes	82 DH
V M	4 000 tommes	38 DH
	1 800 tommes	61 DH

- Contraintes :

Le programme de production sera déterminé en fixant le niveau de production et de vente de M à 3 000 unités.

Contraintes commerciales :

- Ventes de B limitées à 10 000 unités
- Ventes de V limitées à 5 000 unités

Contraintes d'approvisionnement

Il est possible de collecter au maximum 261 250 litres de lait de brebis, mais il n'y a aucune contrainte d'approvisionnement en lait de vache.

La consommation laitière (volume de lait nécessaire à la fabrication d'un type de fromage) est de :

- 27,5 litres de lait de brebis pour B
- 45 litres de lait de vache pour V
- 10 litres de lait de brebis et 28 litres de lait de vache pour M.

Contraintes de production

Une entreprise peut transformer au maximum, trois cuves de 1 000 litres de lait par jour. L'atelier fonctionne 5 jours par semaine. Il est fermé 5 semaines consécutives par an pour congés.

Le rendement fromager (nombre de fromages par cuve) est de :

- 36 fromages pour B ;
- 22 fromages pour V ;
- 26 fromages pour M.

Contraintes d'affinage

La cave a une capacité de stockage de 3 000 fromages. La durée d'affinage est de :

- 120 jours pour B ;
- 45 jours pour V ;
- 75 jours pour M.

Par souci de simplification, on considérera que la mise en affinage peut être répartie uniformément sur l'année (prise pour 360 jours).

Solution

A. Programme optimal de production (exercice N-1)

1. Programme canonique

Ce programme comporte deux variables, X_B et X_V , les quantités produites et vendues par an de fromage de brebis et de vache, exprimées en nombre de fromages, le sujet donnant la quantité des fromages mixtes ($X_M = 3\ 000$). Cela permet d'accéder à une méthode de résolution graphique. Il est cependant plus simple d'exprimer au départ les contraintes en fonction des trois variables.

- Fonction économique à maximiser : la marge sur coût variable annuelle
 $MCV = 82 X_B + 38 X_V + 61 X_M = 82 X_B + 38 X_V + 183\ 000$

Il suffit de maximiser $82 X_B + 38 X_V$

- Formulation des contraintes

Contraintes portant sur la nature même des variables :

$$X_B \geq 0 ; X_V \geq 0$$

Contraintes commerciales

$X_B \leq 10\ 000$; droite parallèle à l'axe des ordonnées, passant par le point A (10 000 ; 0)
 $X_V \leq 5\ 000$; droite D2 parallèle à l'axe des abscisses, passant par le point B (0 ; 5 000)

Contraintes d'approvisionnement

Consommation annuelle \leq collecte maximale annuelle (en nombre de litres de lait de brebis)

$$27,5 X_B + 10 X_M \leq 261\ 250 \quad \text{avec } X_M = 3\ 000$$

- ◆ $X_B \leq 8\ 409$ (valeur arrondie) : droite D3 parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point C (8 409 ; 0)

Contraintes de production

Production totale annuelle \leq capacité maximale annuelle (exprimées en nombre de cuves)

$$X_B / 36 + X_V / 22 + X_M / 26 \leq 3 \times [5 \times (52 - 5)]$$

- ◆ $11 X_B + 18 X_V \leq 233\ 640$ (valeur arrondie) : droite D4 passant par les points D (0 ; 12 980) et E (21 240 ; 0)

Contraintes d'affinage

Besoins en affinage \leq capacité d'affinage (exprimés en nombre de jours x nombres de fromages)

$$120 X_B + 45 X_V + 75 X_M \leq 3\ 000 \times 360$$

- Présentation du programme :

Maximiser : $MCV = 82 X_B + 38 X_V + 183\ 000$

Sous les contraintes : $X_B \geq 0 ; X_V \geq 0$

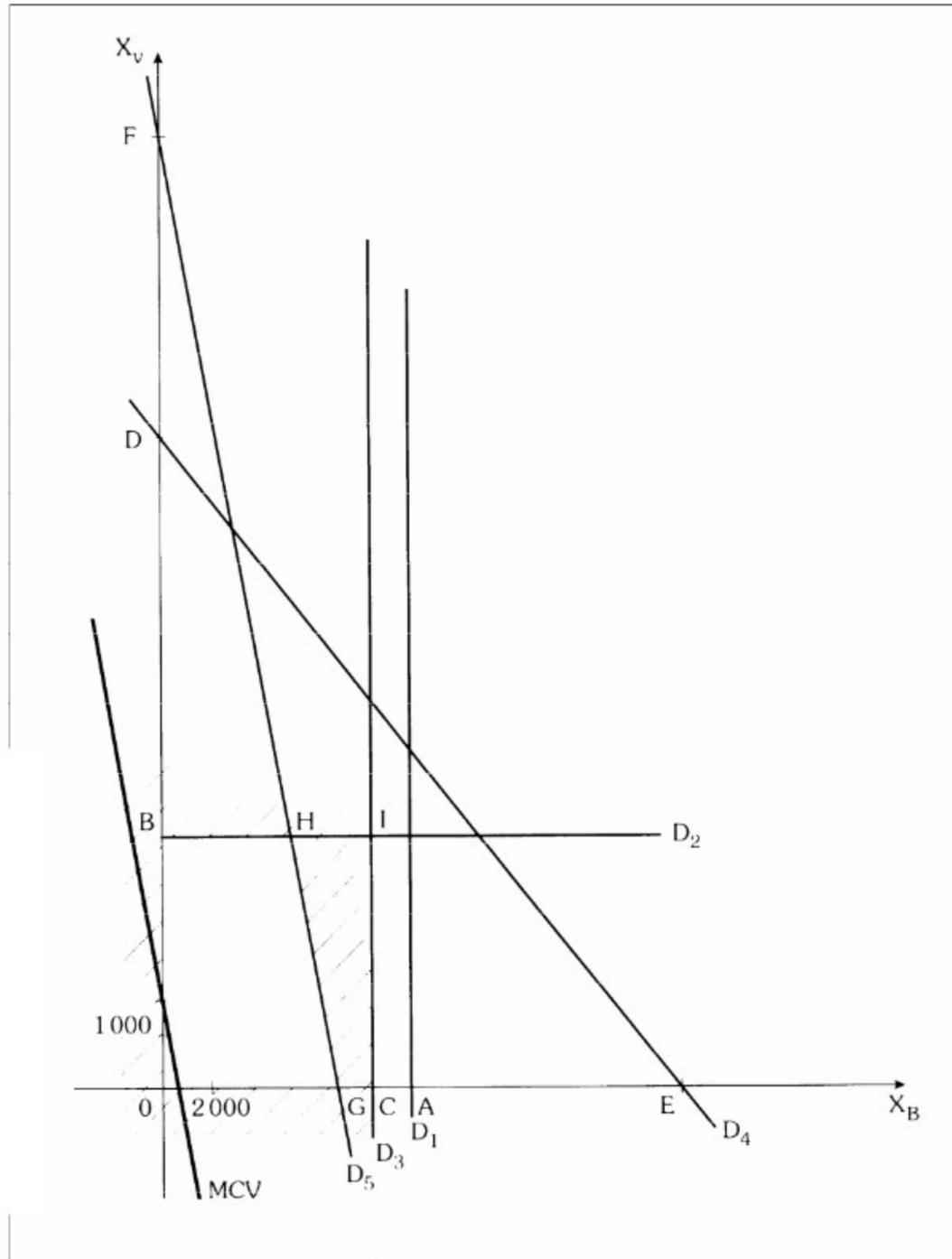
$X_B \leq 10\ 000 ; X_V \leq 5\ 000$

$X_B \leq 8\ 409$

$$11 X_B + 18 X_V \leq 233\,640$$

$$8 X_B + 3 X_V \leq 57\,000$$

2. Résolution graphique



- Lecture du graphique
 - Zone d'acceptabilité : (O, G, H, B)
 - Optimum : point H ($\approx 5\ 200 ; 5\ 000$)
 - Contraintes saturées : D2 (contrainte commerciale sur les fromages de vache) et D5 (contrainte d'affinage).

- Calculs à partir du graphique

Valeur de X_B , sachant que $X_V = 5\ 000$, à partir de la contrainte d'affinage : $8 X_B + 3 X_V \leq 57\ 000$

$$X_V = 5\ 000 \Rightarrow X_B = 5\ 250$$

L'optimum est donc $X_B = 5\ 250$ et $X_V = 5\ 000$

- Calcul de la MCV optimale

$$MCV = (5\ 250 \times 82) + (5\ 000 \times 38) + 183\ 000 = 803\ 500 \text{ DH}$$

- Calcul du résultat optimal

$$\text{Résultat optimal} = MCV - CF = 803\ 500 - 800\ 000 = 3\ 500 \text{ DH}$$

B. Desserrement des contraintes

Si l'on confie l'affinage supplémentaire des fromages B à un sous-traitant, la contrainte d'affinage devient :

$$(8 \times 5\ 250) + 3 X_V \leq 57\ 000 \quad \blacklozenge \quad X_V \leq 5\ 000$$

Le nouvel optimum est le point I ($8\ 409 ; 5\ 000$) à l'intersection des droites D3 (contrainte d'approvisionnement en lait de brebis) et D2 (contrainte commerciale du fromage V).

- Calculs de la marge sur coût variable supplémentaire

On sait que les 3 159 tommes supplémentaires de fromage B coûtent en plus 5 DH d'affinage chez le sous-traitant, soit 25 DH par tomme de 5 kg. MCV

$$\text{supplémentaire} = 3\ 159 \times (82 - 25) = 180\ 063 \text{ DH}$$

$$MCV \text{ totale} = 803\ 500 + 180\ 063 = 983\ 563 \text{ DH}$$

- Résultat = $MCV - CF = 983\ 063 - 800\ 000 = 183\ 563 \text{ DH}$.